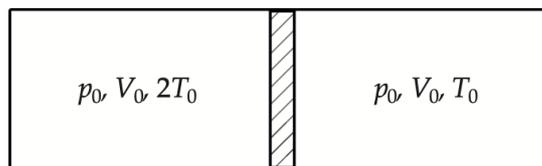




Установление равновесия (6 баллов)

Бычков А.И.

В теплоизолированном цилиндре, расположенном горизонтально, лёгкий, хорошо проводящий тепло поршень делит объём на две равные части, каждая объёмом V_0 . В обеих частях находится один и тот же одноатомный идеальный газ при начальном давлении p_0 и температурах $2T_0$ и T_0 (см. рисунок). Теплоёмкостью поршня можно пренебречь.



Мощность теплообмена между частями цилиндра пропорциональна разности температур: $P = \alpha(T_1 - T_2)$, где α – коэффициент теплопередачи, T_1 – температура в левой части, T_2 – в правой. В процессе установления равновесия поршень медленно перемещается без трения о стенки цилиндра.

а) (2 балла) Найдите конечную температуру, содержащего цилиндра.

б) (2 балла) Найдите время, в течение которого разность температур между частями цилиндра уменьшается в e раз по сравнению с начальной разностью температур T_0 .

в) (2 балла) Найдите зависимость объёма левой части цилиндра от времени $V_1(t)$.

Решение.

а) Запишем уравнения состояния для начального момента времени:

$$p_0 V_0 = \nu_1 R \cdot 2T_0, \quad p_0 V_0 = \nu_2 R \cdot T_0.$$

Отсюда получаем, что $\nu_2 = 2\nu_1$.

Пусть в некоторый момент времени t температура в левой части цилиндра равна T_1 , а в правой – T_2 . Согласно первому началу термодинамики

$$\frac{3}{2} \nu_1 R (2T_0 - T_1) = \frac{3}{2} \cdot \nu_2 R (T_2 - T_0), \quad (1)$$

где T_1 и T_2 – температуры в левой и правой частях цилиндра в момент времени t соответственно.

В конце процесса теплообмена температуры в левой и правой частях уравниваются. Тогда $2T_0 - T = 2T - 2T_0$. Откуда получаем ответ на пункт а): $T = \frac{4}{3} T_0$.

б) По условию задачи тепло передаётся медленно, значит, давления на поршень с двух сторон практически равны, то есть в любой момент времени $p_1 = p_2$. Перепишем уравнение (1), воспользовавшись уравнением состояния:

$$p_0V_0 - p_1V_1 = p_2V_2 - p_0V_0 \Rightarrow p_1 = p_2 = p_0.$$

То есть процесс теплопередачи происходит изобарически, и молярная теплоёмкость равна $c_p = \frac{5}{2}R$.

Пусть за малое время dt температуры частей цилиндра изменились на величины dT_1 и dT_2 . Тогда

$$\frac{5}{2}v_1RdT_1 = \alpha(T_2 - T_1)dt, \quad \frac{5}{2}v_2RdT_2 = \alpha(T_1 - T_2)dt \Rightarrow \frac{dT_1}{dt} = \frac{2\alpha(T_2 - T_1)}{5v_1R}, \quad \frac{dT_2}{dt} = \frac{2\alpha(T_1 - T_2)}{5v_2R}.$$

Введём обозначение $\Delta T = T_1 - T_2$. Вычтем из первого уравнения второе:

$$\frac{d\Delta T}{dt} = -\frac{2\alpha}{5R} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right) \Delta T = -\frac{6\alpha T_0}{5p_0V_0} \Delta T.$$

Решая это дифференциальное уравнение, получаем: $\Delta T = T_0 e^{-\lambda t}$, где $\lambda = \frac{6\alpha T_0}{5p_0V_0}$. Значит, время, в течение которого разность температур между частями цилиндра уменьшается в e раз по сравнению с начальной разностью температур T_0 , равно $\frac{5p_0V_0}{6\alpha T_0}$.

в) Из уравнения $T_1 - T_2 = T_0 e^{-\lambda t}$ и уравнения (1) следует:

$$T_1(t) = \frac{4}{3}T_0 + \frac{2}{3}T_0 e^{-\lambda t}, \quad T_2(t) = \frac{4}{3}T_0 - \frac{1}{3}T_0 e^{-\lambda t}.$$

Так как процесс изобарический, следовательно, $\frac{V_1(t)}{T_1(t)} = \frac{v_1R}{p_0}$. Откуда получаем окончательный ответ:

$$V_1(t) = \frac{v_1R}{p_0} \left(\frac{4}{3}T_0 + \frac{2}{3}T_0 e^{-\lambda t} \right) = \frac{2}{3}V_0 + \frac{1}{3}V_0 e^{-\lambda t}.$$

Критерии оценивания.

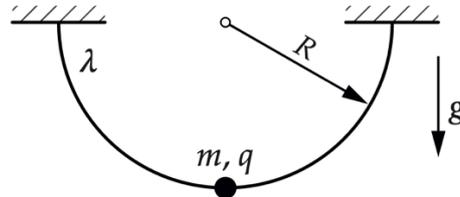
№	Критерий	Балл
1а.1	Записаны уравнения состояния для начального момента времени	0,5
1а.2	Записано первое начало термодинамики для начального и промежуточного состояний.	1,0
1а.3	Найдена конечная температура $T = \frac{4}{3}T_0$.	0,5
1б.1	Установлено, что процесс изобарический.	0,5
1б.2	Записаны уравнения $\frac{5}{2}v_1RdT_1 = \alpha(T_2 - T_1)dt, \quad \frac{5}{2}v_2RdT_2 = \alpha(T_1 - T_2)dt$	1,0

1б.3	Найдено время, в течение которого разность температур между частями цилиндра уменьшается в e раз по сравнению с начальной разностью температур T_0 : $\tau = \frac{5\rho_0 V_0}{6\alpha T_0}$.	0,5
1в.1	Получена зависимость температуры левого отсека от времени: $T_1(t) = \frac{4}{3}T_0 + \frac{2}{3}T_0 e^{-\lambda t}$, где $\lambda = \frac{6\alpha T_0}{5\rho_0 V_0}$.	1,0
1в.2	Найдена зависимость объёма левой части цилиндра от времени $V_1(t): V_1(t) = \frac{2}{3}V_0 + \frac{1}{3}V_0 e^{-\lambda t}$	1,0

Колебания бусинки (6 баллов)

Бычков А.И.

На гладком, равномерно заряженном полукольце радиусом R , закреплённом в вертикальной плоскости, в его нижней точке покоится одноимённо заряженная бусинка массой m и зарядом q . Линейная плотность заряда полукольца равна λ . Ускорение свободного падения равно g .

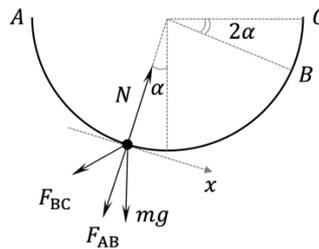


а) (3 балла) При каких значениях заряда q равновесие бусинки будет устойчивым? Параметры λ , g , R и m считаются известными.

б) (3 балла) Пусть заряд бусинки q таков, что положение её равновесия в нижней точке полукольца является устойчивым. Определите период малых колебаний бусинки вблизи положения равновесия. Параметры λ , q , g , R и m известны.

Решение.

а) Сместим бусинку из положения равновесия на малый угол α от вертикали.



Из симметрии следует, что участок AB полукольца действует на бусинку по нормали с силой F_{AB} , как показано на рисунке. Напишем условие существования возвращающей силы в касательном к полукольцу направлении (ось Ox):

$$mg \sin \alpha - F_{BC} \cos \frac{\pi}{4} \geq 0.$$

Так как $F_{BC} = k \frac{q\lambda R \cdot 2\alpha}{2R^2}$ (направлена под углом $\frac{3\pi}{4}$ к оси Ox), и справедлива приближённая формула $\sin \alpha \approx \alpha$, получаем

$$k \frac{q\lambda R \cdot 2\alpha}{2R^2} \leq \frac{mg\alpha}{\cos \frac{\pi}{4}} \Rightarrow q \leq \frac{\sqrt{2}mgR}{k\lambda}.$$

б) Запишем второй закон Ньютона для бусинки (см. рисунок):

$$-m\ddot{x} = mg \sin \alpha - F_{BC} \cos \frac{\pi}{4} \approx mg \frac{x}{R} - k \frac{q\lambda \cdot x}{R^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, период малых колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sqrt{2}mR^2}{\sqrt{2}mgR - kq\lambda}}.$$

Критерии оценивания.

№	Критерий	Балл
2а.1	Сила отгаликивания полукольца представлена, как сумма сил, действующих со стороны элемента длины $2\alpha R$ (где α угол отклонения бусинки от вертикали) и со стороны оставшейся части полукольца, направленной по нормали к ней.	1,0
2а.2	Указано значение и направление силы, действующей со стороны элемента длины $2\alpha R$.	1,0
2а.3	Приведена формула приближённого вычисления синуса малого угла.	0,5
2а.4	Приведён верный ответ на вопрос пункта а).	0,5
2б.1	Верно записан 2-й закон Ньютона для бусинки.	1,5
2б.2	Указано, чему равна частота гармонических колебаний.	0,5
2б.3	Приведён верный ответ на вопрос пункта б).	1,0

Поле в центре (5 баллов)

Бычков А.И.

В этой задаче рассматриваются плоские конструкции, изготовленные из однородной проволоки постоянного сечения, единица длины которой имеет сопротивление ρ . Требуется определить индукцию магнитного поля, порождаемую токами, текущими по проволоке.

а) (2 балла) Проволочной конструкцией, рассматриваемой в этом пункте, является кольцо радиусом r . В точках 1, 2 и 3, находящихся на равных расстояниях друг от друга (см. рис. 1), к кольцу подключены источники ЭДС, так что если положить потенциал точки 3 равным нулю, то потенциалы точек 1 и 2 окажутся равными φ_1 и φ_2 соответственно. Определите индукцию магнитного поля, создаваемого участком 1-2 в центре кольца.

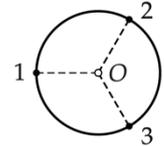


Рис. 1

б) (3 балла) В этом пункте рассматривается плоская конструкция, изображённая на рис. 2. Она состоит из двух concentric rings, двух радиальных перемычек и двух длинных, прямолинейных проводников. Точками чёрного цвета обозначены точки спаивания. В точке A контакта между проволоками нет. Радиусы concentric rings равны r и $2r$, углы между прямолинейными проволочными участками равны α , как показано на рисунке. Определите индукцию магнитного поля в общем центре колец, в точке O.

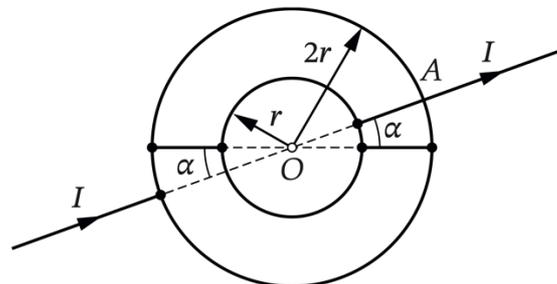


Рис. 2

Решение.

а) Выберем ось z перпендикулярную плоскости рисунка направленную на нас. Из закона Био-Савара-Лапласа следует, что вектор индукции поля, создаваемого участком 1-2, перпендикулярен плоскости рисунка. Его проекция на ось z равна:

$$B_z = \frac{\mu_0 I_{21} L}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I_{21} \rho L}{4\pi \rho r^2} = \frac{\mu_0 \varphi_2 - \varphi_1}{4\pi \rho r^2},$$

где I_{21} – алгебраическое значение протекающего через участок 1-2 (положителен, когда ток течёт от точки 2 к точке 1, и отрицателен, когда наоборот), L – длина участка 1-2.

б) Радиальные перемычки и прямолинейные провода в точке O магнитного поля не создают, так как лежат на прямых, проходящих через точку O. Кольцо (как малое, так и большое) тоже не создают поля в точке O, поскольку сумма $\sum_i \frac{\mu_0 \varphi_{i+1} - \varphi_i}{4\pi \rho r^2}$ равна нулю при обходе по замкнутому контуру, который не содержит батареек. Таким образом, индукция магнитного поля в точке O равна нулю.

Критерии оценивания

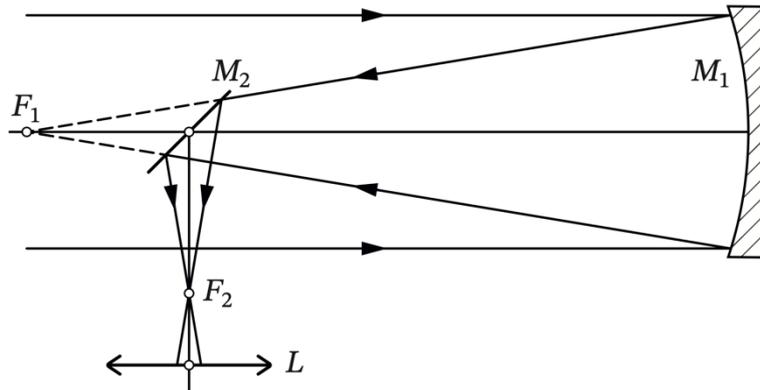
№	Критерий	Балл
3а.1	Найден модуль вектора магнитной индукции в точке O .	1,0
3а.2	Указано, направление вектора магнитной индукции в точке O .	1,0
3б.1	Указано, что радиальные перемычки и прямолинейные провода в точке O магнитного поля не создают.	0,5
4б.2	Доказано, что каждое из колец по-отдельности не создают магнитного поля в точке O .	2,5

Если в основе решения пункта б) лежат законы Кирхгофа, то в случае получения правильного результата выставляется полный балл (3 балла). Если же в ходе решения были правильно записаны часть уравнений и/или высказаны соображения симметрии, но были допущены ошибки, которые привели к неверному результату, то за этот пункт выставляется не более 1 балла

Телескоп-рефлектор Ньютона (10 баллов)

Крюков С.П., Дергачёв А.А.

Рефлектор Ньютона – это зеркальный аналог зрительной трубы Кеплера. Вогнутое сферическое зеркало M_1 (см. рисунок, расположенный ниже по тексту), представляющее собой объектив телескопа-рефлектора, формирует в фокальной плоскости действительное изображение небесного светила. Это изображение рассматривается через окуляр L , роль которого играет собирающая линза. На рисунке, также можно видеть плоское поворотное зеркало M_2 .



Зеркало отклоняет сходящийся отражённый (от вогнутого зеркала) пучок света в сторону. На рисунке схематично показан ход лучей.

а) (4 балла) Пусть радиус сферического зеркала равен R , а фокусное расстояние линзы равно F . Чему равно угловое увеличение прибора?

Указание. Угловым увеличением γ оптических приборов, предназначенных для наблюдения удалённых объектов, называется отношение $\gamma = \frac{\alpha'}{\alpha}$, где α' – угол, под которым рассматриваемый объект виден в окуляре, α – угол зрения невооружённым глазом с того же расстояния.

б) (3 балла) Один из крупнейших в мире телескоп Специальной астрофизической обсерватории РАН (сделанный по схеме Ньютона) имеет фокусное расстояние объектива $F = 300$ м. Каков максимально допустимый угол φ_{\max} качания телескопа, обусловленный вибрациями фундамента обсерватории, при котором ещё полностью используется разрешающая способность фотоплёнки $\delta = 50$ линий/мм при фотографировании астрономических объектов? При фотографировании плёнка помещается в фокальную плоскость объектива, используется длительная выдержка до нескольких минут.

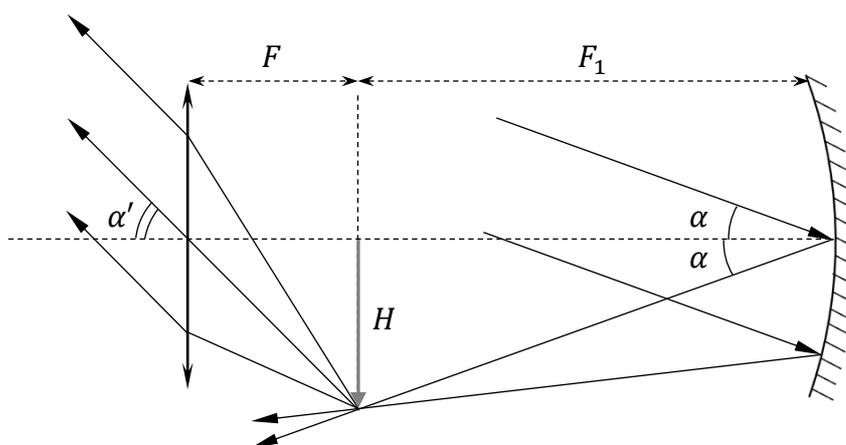
в) (3 балла) Пусть из-за проходящих рядом с обсерваторией строительных работ телескоп колеблется с амплитудой 10^{-6} рад. Чему будет равен размер изображения на плёнке, если угловой размер источника 10^{-7} рад?

Решение.

а) При наблюдении удалённого предмета объектив формирует его действительное изображение в своей фокальной плоскости. Это изображение рассматривается в окуляр, как в лупу. Если фокальные плоскости объектива и окуляра совпадают, то параллельный входящий пучок переходит в параллельный выходящий, но идущий, вообще говоря, под другим углом к главной оптической оси системы. В этом случае наблюдение ведётся ненапряжённым глазом и угловое увеличение телескопа легко находится из рисунка

$$\gamma = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{H/F}{H/F_1} = \frac{F_1}{F} = \frac{R}{2F_2}.$$

где H – размер изображения в совмещённых фокальных плоскостях объектива и окуляра, $F_1 = \frac{R}{2}$ – фокусное расстояние объектива.



б) При повороте зеркала из-за тряски фундамента на угол φ его главная оптическая ось поворачивается тоже на угол φ , а изображение точки астрономического объекта, находящееся в фокальной плоскости, сместится, как нетрудно понять, на $2F\varphi$ (на φ возрастёт угол падения и на столько же – угол отражения). Но та же тряска фундамента вызовет смещение самой плёнки на $F\varphi$ (ибо «всё» вместе с фундаментом повернётся на угол φ), так что относительно плёнки изображение сместится только на $F\varphi$. Очевидно, что эта величина не должна быть больше $1/\delta$, откуда

$$\varphi_{\max} = \frac{1}{F\delta} \approx 6,7 \cdot 10^{-8} \text{ рад.}$$

в) Обозначим угловой размер источника $\alpha = 10^{-7}$. В идеальных условиях размер его изображения на плёнке будет равен $\Delta_0 = \alpha F$, так что на плёнке получится круг указанного диаметра. Однако вследствие вибраций обсерватории центр изображения Плутона при съёмке будет хаотически смещаться с амплитудой $d = \varphi F$. Размах колебаний центра (расстояние между крайними положениями) будет вдвое больше амплитуды, а полный размер изображения, полученного с длительной выдержкой, составит $\Delta = \Delta_0 + 2d = F(\alpha + 2\varphi) = 0,63 \text{ мм.}$

Критерии оценивания.

№	Критерий	Балл
4а.1	Приведён схематичный рисунок хода лучей, «проходящих» через объектив и окуляр телескопа.	1,0

4а.2	Указано, что фокусное расстояние объектива равно $\frac{R}{2}$.	1,0
4а.3	Найдено угловое увеличение телескопа: $\gamma = \frac{R}{2F_2}$.	2,0
4б.1	Высказана мысль о том, что из-за вибрации фундамента на угол φ , изображение точки астрономического объекта, находящееся в фокальной плоскости, сместится на $2F\varphi$.	0,5
4б.2	Высказана мысль о том, что та же вибрация фундамента вызовет смещение самой плёнки на $F\varphi$.	1,0
4б.3	Получен правильный числовой ответ: $\varphi_{\max} \approx 6,7 \cdot 10^{-8}$ рад.	1,5
4в.1	Указывается, что изображение на плёнке в случае отсутствия колебаний телескопа будет представлять собой круг диаметром $\Delta_0 = \alpha F$.	1,0
4в.2	Высказана мысль о том, что вследствие вибраций обсерватории центр изображения источника при съёмке будет хаотически смещаться с амплитудой $d = \varphi F$.	1,0
4в.3	Получен верный ответ $\Delta = 0,63$ мм. Если вместо Δ верно вычислен угловой размер изображения, баллы не снимаются.	1,0

Пизанская башня (12 баллов)

Черников Ю.А.

Согнутую в виде спирали металлическую полосу можно использовать в качестве пружины кручения, то есть пружины, препятствующей повороту механизмов (см. рис. 3). При попытке распрямить или скрутить такую пружину она развивает возвращающий момент сил M , пропорциональный углу поворота α : $M = \gamma\alpha$, где γ – постоянный коэффициент жёсткости кручения пружины. Нижний конец лёгкого жёсткого вертикального стержня длиной l жёстко скреплён со свободным концом пружины кручения. Внутренний конец пружины закреплён. К верхнему концу стержня прикладывается сила F , направленная вертикально вниз.

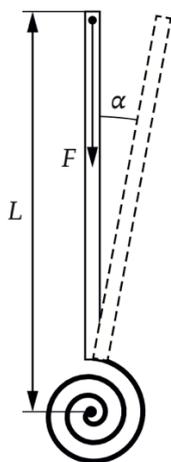


Рис. 3

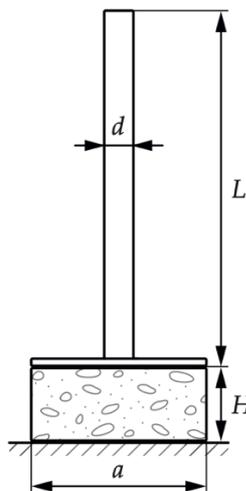


Рис. 4

а) (3 балла) При какой максимальной силе F_{\max} вертикальное положение равновесия стержня ещё будет оставаться устойчивым?

б) (2 балла) Каким будет угол отклонения, если сила воздействия будет равна $F = 1,01F_{\max}$?

Пизанская башня – один из известнейших памятников архитектуры. Башня отличается тем, что её ось отклонена на некоторый угол от вертикали из-за мягкости грунта под её основанием. Рассмотрим модель башни, стоящей на грунте. Башня представляет собой однородный цилиндр, высотой L и диаметром d (рис. 4), масса единицы длины башни равна λ . Башня поставлена по центру на жёсткое невесомое квадратное основание со стороной a , к которому снизу приклеена поролоновая подушка того же сечения. Высота подушки, после установки на неё башни составляет H . Вся конструкция установлена на жёстком столе. Масса распределена по башне однородно. Модуль Юнга поролона равен E . Коэффициент трения между башней и основанием можно считать достаточно большим, так что башня не проскальзывает относительно основания.

в) (4 балла) При какой минимальной высоте башни L_1 она займёт устойчивое наклонное положение?

г) (3 балла) При какой минимальной высоте башни L_2 она опрокинется? Выразите ответ через L_1 и d , считая $d \ll L_1$.

Указание 1. При малой относительной деформации $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ растяжения/сжатия стержня с площадью поперечного сечения S сила упругости, возникающая в нём, может быть рассчитана по формуле $F = E\varepsilon S$, где E – модуль Юнга материала стержня.

Указание 2. При ответе на вопросы разных пунктов задачи могут оказаться очень полезными приближённые формулы, справедливые для малых значений α ($\alpha \ll 1$):

$$\sin \alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{6}, \quad \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3}.$$

Решение.

а) Пусть рычаг отклонился от вертикали и находится в состоянии равновесия (рисунок 4). Тогда сумма моментов сил, действующих на рычаг, будет равна нулю:

$$Fl \sin \alpha = \gamma a.$$

Посмотрим на графическое решение этого уравнения. Нарисуем графики зависимости момента сил скручивающего пружину и момента сил упругости от угла α . Возможно две ситуации, изображенные на рисунках 5 (а, б).

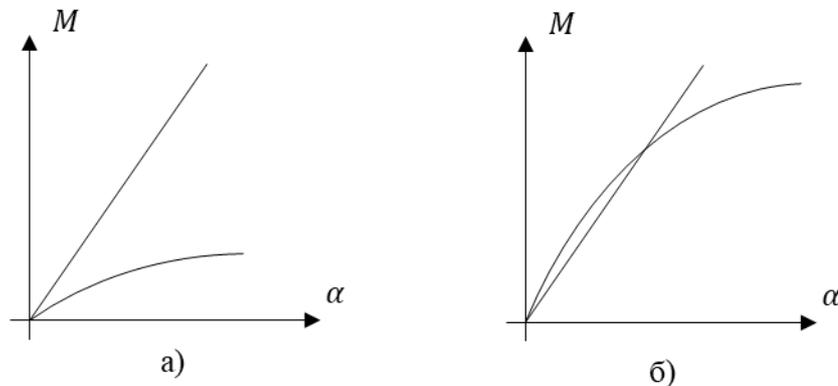
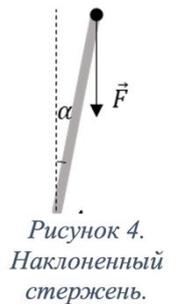


Рисунок 5. Графическое решение уравнения равновесия рычага.

Видно, что в случае малой приложенной силы график синуса лежит ниже прямой и уравнение имеет только одно решение, соответствующее вертикальному положению рычага. При превышении некоторого предела, решений уравнения становится два. При этом вертикальное положение оказывается неустойчивым. Действительно, при малом отклонении от положения равновесия возвращающий момент сил оказывается меньше момента сил, увеличивающего отклонение. Таким образом, при преодолении критической силы положение равновесия окажется наклоненным. Критическую силу легко рассчитать, рассмотрев переходную от рисунка а) к рисунку б) ситуацию. В ней угловой коэффициент обоих графиков в нулевом положении должен совпадать, то есть:

$$F_{\max} l = \gamma \Rightarrow F_{\max} = \frac{\gamma}{l}.$$

б) Для нахождения нового положения равновесия можем воспользоваться формулой приближенного исчисления синуса угла:

$$Fl \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6} \right) = \gamma \alpha.$$

Сократим выражение на α , так как нулевой корень уравнения нас не интересует и решим квадратное уравнение:

$$Fl \left(1 - \frac{\alpha^2}{6} \right) = \gamma.$$

Два корня уравнения соответствуют двум возможным положениям отклонения рычага:

$$\alpha = \pm \sqrt{6 \left(1 - \frac{\gamma}{Fl} \right)} = \pm \sqrt{6 \left(1 - \frac{1}{1,01} \right)} = 0,24 \approx 14^\circ.$$

в) Рассмотрим теперь модель Пизанской башни, установленной на упругой опоре. Пусть основание башни наклонилось на угол φ (рисунок 6). Тогда за счет сил упругости возникнет возвращающий момент сил. Рассчитаем его.

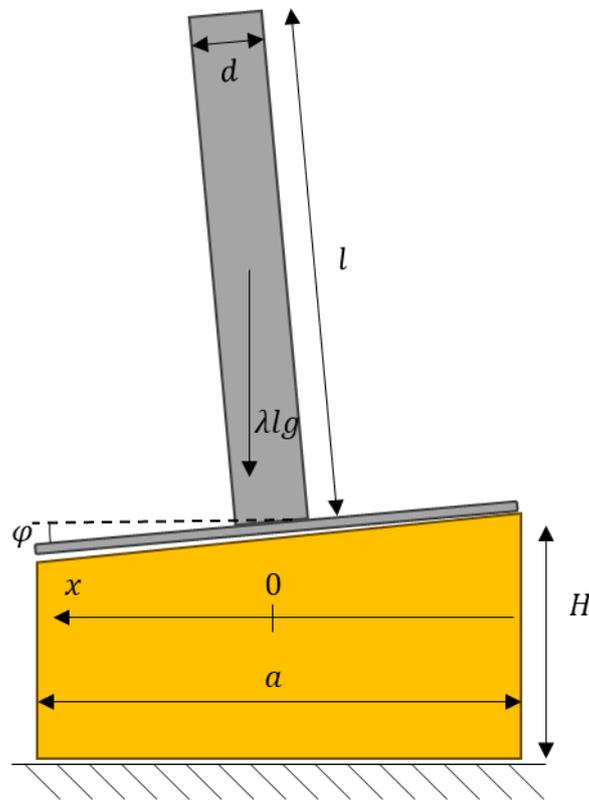


Рисунок 6. Наклоненная башня.

На расстоянии x от осевой линии поролон сожмется на $x \cdot \operatorname{tg} \varphi$. Тогда в сечение поролона площадью $ds = a dx$ возникнет сила в соответствии с законом Гука:

$$dF = E ds \varepsilon = Ea \frac{x \cdot \operatorname{tg} \varphi}{H} dx.$$

Эта сила будет носить вклад в суммарный возвращающий момент сил:

$$dM = x dF = Ea \frac{x^2 \cdot \operatorname{tg} \varphi}{H} dx.$$

Тогда суммарный момент сил может быть рассчитан как:

$$M = 2 \int_0^{a/2} Ea \frac{\operatorname{tg}\varphi \cdot x^2}{H} dx = \frac{Ea^4 \cdot \operatorname{tg}\varphi}{12H}.$$

То есть для малых углов крутильная жесткость подставки составит:

$$\gamma' = \frac{Ea^4}{12H}.$$

На наклоненную башню действует момент силы тяжести равный:

$$M_g = \lambda \frac{L^2}{2} g \sin \varphi.$$

Аналогично пункту а) башня выйдет из вертикального положения в случае равенства коэффициента пропорциональности между синусом моментом силы и крутильной жесткости опоры:

$$\frac{Ea^4}{12H} = \lambda \frac{L_1^2}{2} g$$

$$L_1 = \sqrt{\frac{Ea^4}{6\lambda gH}}$$

Рассмотрим наклонное равновесие башни:

$$\frac{Ea^4 \cdot \operatorname{tg}\varphi}{12H} = \lambda \frac{L^2}{2} g \sin \varphi.$$

С учётом приближенных формул:

$$\left(1 + \frac{\varphi^2}{3}\right) = \frac{L^2}{L_1^2} \left(1 - \frac{\varphi^2}{6}\right).$$

Предельный угол отклонения башни, прежде чем она опрокинется, определяется её высотой и диаметром:

$$\varphi_{\text{кр}} = \frac{d}{L}.$$

Тогда для расчета критической высоты башни запишем:

$$\left(1 + \frac{d^2}{3L_1^2}\right) = \frac{l_2^2}{l_1^2} \left(1 - \frac{d^2}{6L_1^2}\right).$$

Преобразуем уравнение к виду биквадратного:

$$\frac{L_2^4}{L_1^2} - L_2^2 \left(1 + \frac{d^2}{6L_1^2}\right) - \frac{d^2}{3} = 0.$$

Рассчитаем дискриминант:

$$D = \left(1 + \frac{d^2}{6L_1^2}\right)^2 + 4 \frac{d^2}{3L_1^2}.$$

С учетом указанного в условии приближения:

$$D = 1 + \frac{5d^2}{3L_1^2}.$$

Тогда выберем положительный корень уравнения:

$$L_2^2 = \frac{L_1^2}{2} \left(1 + \frac{d^2}{6L_1^2} + \sqrt{1 + \frac{5d^2}{3L_1^2}}\right) \approx \frac{l_1^2}{2} \left(1 + \frac{d^2}{6L_1^2} + 1 + \frac{5d^2}{6L_1^2}\right) = l_1^2 \left(1 + \frac{d^2}{2L_1^2}\right)$$

И окончательно для длины l_2 с учётом приближений:

$$L_2 = L_1 \sqrt{\left(1 + \frac{d^2}{2L_1^2}\right)} \approx l_1 \left(1 + \frac{d^2}{4L_1^2}\right)$$

Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
5а.1	Составлено уравнение моментов для отклоненного от вертикали стержня.	1,0
5а.2	Проведён анализ уравнения моментов для различных углов отклонения стержня от вертикали.	1,0
5а.3	Получен ответ $F_{\max} = \frac{\gamma}{l}$	1,0
5б.1	Записано уравнение моментов с учётом приближённой формулы для синуса малого угла	1,0
5б.2	Найден угол отклонения стержня $\alpha \approx 0,24$ рад.	1,0
5в.1	Записано выражение для силы упругости в сечении поролоновой подушки площадью $ds = adx$, при наклонном положении основания, как функция координаты x на горизонтальной оси.	0,5
5в.2	Рассчитан суммарный момент сил, действующих на основание со стороны поролоновой подушки: $M = \frac{Ea^4 \cdot \text{tg}\varphi}{12H}$, где φ – угол наклона основания относительно горизонта.	1,5
5в.3	Записано выражение для момента силы тяжести башни.	0,5
5в.4	Найдена высота башни L_1 : $L_1 = \sqrt{\frac{Ea^4}{6\lambda gH}}$.	1,5
5г.1	Составлено уравнение моментов для отклонённой от вертикали башни.	0,5
5г.2	Написано выражение для предельного угла отклонения башни от вертикали, прежде чем она опрокинется: $\varphi_{\text{кр}} = \frac{d}{L}$.	1,0
5г.3	Найдена высота башни L_2 : $L_2 = L_1 \sqrt{\left(1 + \frac{d^2}{2L_1^2}\right)} \approx l_1 \left(1 + \frac{d^2}{4L_1^2}\right)$	1,5