ПРИЛОЖЕНИЕ 7.3
К КУРСУ О.Ю.ШВЕДОВА
«УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА»

задания повышенной трудности

Москва — Курск — Орел — Рязань, 2010 г.

Вариант 1

У1.1 (физфак, 1991) При каких значениях a все корни уравнения

$$ax^2 + (2a^3 - 6a^2 - 1)x - 2a(a-3) = 0$$

удовлетворяют условию $|x| < 2$?

У1.2 (физфак, 2003) Для каждого допустимого значения b в уравнении

$$\sqrt{x} + \sqrt{\sqrt{b} - x} = b$$

найти число различных решений уравнения и сами решения.

У1.3 (физфак, 1989) Найти все значения p, при каждом из которых уравнение

$$4(x - \sqrt{p \cdot 7^p})x + p + 7(7^p - 1) = 0.$$

имеет корни. Выяснить знаки корней при различных значениях p.

У1.4 (физфак, 2004) Для каждого значения a решить уравнение

$$\log_2^2\left(\frac{x-5a}{x}\right) + 4(\log_4(x-5a))\log_2 x - 8\log_4^2 x = 0.$$

У1.5 (биофак, 1997) В двух коробках лежали карандаши: в первой — красные, во второй — синие, причем красных — больше. Сначала 40% карандашей из первой коробки переложили во вторую. Затем 20% карандашей, оказавшейся во второй коробке, переложили в первую, причем половину из переложенных карандашей составляли синие. В итоге красных карандашей в первой коробке оказалось на 10 больше, чем во второй. Найти общее количество карандашей.

Вариант 2

У2.1 (физфак, 1995) Найти минимальное значение произведения xy, где x и y удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x + y = 2a - 1, \\ x^2 + y^2 = \frac{3}{2}a^2 - a + 2. \end{cases}$$

У2.2 (физфак, 1990) Определить, при каких значениях b уравнение

$$\log_{\sqrt{1-x}}\sqrt{2x+b+2} = 2$$

имеет решения и найти эти решения.

У2.3 (филфак, 2002) Значение a подобрано так, что наименьший корень уравнения
$$x^3 + 2x = 4x^2 - 4$$
удовлетворяет неравенству
$$a^{5x-4} > a^{-x^2+4x-4}$$
Решить это неравенство.

У2.4 (физфак, 2002) Для каждого значения a решить неравенство
$$(x^2 + 4x - a^2 - 2a + 3)(\sin x + 3x) > 0.$$

У2.5 (геологи, 1984) Три мальчика хотели вместе купить две одинаковые игрушки. Сложив все свои деньги, они не смогли купить даже одну игрушку. Если бы у первого мальчика было вдвое больше денег, то им на покупку двух игрушек не хватило бы 34 коп. Когда количество денег третьего мальчика утроили, у них после покупки осталось еще 6 коп. Сколько стоила одна игрушка, если первоначально у второго мальчика было на 9 коп больше, чем у первого?

Вариант 3

У3.1 (психологи, 2004) Найти все значения параметра a, при которых уравнение
$$|x^2 - 16|x|| = a(x - 9)$$
имеет ровно три различных корня.

У3.2 (почвоведы, 1996) Определите, при каких значениях a решения неравенства
$$\sqrt{x + a} \geq x$$
образуют на числовой прямой отрезок длины $2|a|$.

У3.3 (физфак, 1995) Для всех значений a решить неравенство
$$2^{\sqrt{x-1}} > 3^{a+1}.$$

У3.4 (физфак, 2001) Для каждого значения a найти все решения уравнения
$$\cos 2x + 2\sin^2(x + a) + 2 + \sin a = 0,$$
принадлежащие промежутку $\pi \leq x \leq 2\pi$.

У3.5 (ВМК, 2001) Сумма первых четырех членов целочисленной арифметической прогрессии равна 56, а ее двенадцатый член больше 67, но меньше 74. Найти двадцатый член прогрессии.

Вариант 4

У4.1 (химфак, 2007) Найти все значения параметра a, при каждом из которых среди корней уравнения

$$ax^2 + (a+4)x + a + 1 = 0$$

имеется ровно один отрицательный.

У4.2 (филфак, 2002) При каждом a решить уравнение

$$\sqrt{|x|+1} - \sqrt{|x|} = a.$$

У4.3 (физфак, 1996) Для любого допустимого значения a решить неравенство

$$2 - \log_a(x-3) < \log_a x.$$

У4.4 (физфак, 1999) При каких значениях a уравнение

$$\cos 2x + 2\sin x + 2a^2 + 2a - 1 = 0$$

имеет ровно одно решение на промежутке $0 \le x < 2\pi$?

У4.5 (геологи, 1984) В саду было подготовлено четное число ям для посадки деревьев. После посадки яблонь, груш и слив оказалось, что использовано менее трети ям, груш посажено на 6 больше, чем яблонь, а свободных ям осталось втрое больше, чем посажено слив. Если бы яблонь посадили втрое больше, то свободными остались бы 59 ям. Сколько ям для посадки было подготовлено?

Вариант 5

У5.1 (географы, 1990) Найти все значения параметра a, при которых уравнение $(a+1)x^2 + (|a+2| - |a+10|)x + a = 5$ имеет два различных положительных корня.

У5.2 (почвоведы, 1997) Для каждого значения параметра a решить неравенство

$$\sqrt{a^2 - x^2} \ge a + 1.$$

У5.3 (физфак, 1997) Найти все значения a, при которых неравенство

$$\log_a(x^2 + 2) > 1$$

выполняется для всех значений x.

У5.4 (физфак, 1996) Для каждого значения a найти число решений уравнения

$$a \operatorname{ctg} x - 1 = \cos 2x,$$

принадлежащих отрезку $0 \le x \le 2\pi$.

У5.5 (почвоведы, 2003) Найти двузначное число, если после его деления на сумму его цифр получилось в частном 6 и в остатке 8, а после деления того же числа, но записанного в обратном порядке, на разность его цифр получилось в частном 15 и в остатке 2.

Вариант 6

У6.1 (психологи, 1992) При каких значениях параметров a и b можно найти два различных вещественных корня уравнения $x^3 - 5x^2 + 7x = a$, которые будут также корнями уравнения $x^3 - 8x + b = 0$?

У6.2 (почвоведы, 2003) Найти наименьшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 5} - \sqrt{3x^2}$$

на отрезке $0 \le x \le 3$.

У6.3 (физфак, 2000) При каких значениях b уравнение

$$25^{-x} - (2b+5)5^{-x+\frac{1}{x}} + 10b \cdot 5^{\frac{2}{x}} = 0$$

имеет ровно два решения?

У6.4 (мехмат, 2002) Найти дроби

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}, \quad \frac{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)},$$

если они положительны и одна из них втрое больше другой.

У6.5 (экономисты, 1984) Две бригады землекопов одинаковой производительности каждый вырыли по одинаковому котловану. Вторая бригада работала на полчаса больше первой. Если бы в первой бригаде было на 5 человек больше, то она закончила бы работу на 2 ч раньше. Найдите число землекопов в каждой бригаде.

Вариант 7

У7.1 (биофак, 1993) Найти все такие значения величины x, при которых неравенство

$$(4-2a)x^2 + (13a-27)x + (33-13a) > 0$$

выполняется для всех a, удовлетворяющих условию $1 < a < 3$.

У7.2 (экономисты, 2003) Найти все a, при которых уравнение

$$3\sqrt[5]{x+2} - 16a^2\sqrt[5]{32x+32} = \sqrt[10]{x^2+3x+2}$$

имеет единственный корень.

У7.3 (физфак, 1999) Для любых допустимых значений a решить уравнение

$$\log_a(x^2 - 4a) = \log_a(a^2 + 4x).$$

У7.4 (ВМК, 2002) Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} \cos(3\pi\sqrt{a^2 - x^2}) = 1, \\ 2^{|ax|+1} + 2^{3-|ax|} \leq 17 \end{cases}$$

имеет наибольшее количество решений.

У7.5 (геологи, 2007) Сумма первых пятнадцати членов арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, больше 337, но меньше 393. Чему равен восьмой член этой прогрессии, если известно, что он кратен четырем?

Вариант 8

У8.1 (социофак, 2002) Найти все a, при которых уравнение

$$(1+a)x^2 + (1-a)x + (a+3) = 0$$

имеет хотя бы один корень и все его корни целочисленные.

У8.2 (физфак, 1997) Для любых значений a решить неравенство

$$(a+4)\sqrt{5-x} > a+3.$$

У8.3 (физфак, 2003) Для каждого допустимого значения a решить неравенство

$$\sqrt{17 - \log_a x^4} > (\log_{|a|} x)(1 - 3\log_x a).$$

У8.4 (ВМК, 2002) Решить неравенство

$$2\cos(\arcsin x) - \sin(\frac{1}{2}\arccos x) \leq 0.$$

У8.5 (экономисты, 1984) Из строительных деталей двух видов можно собирать дома трех видов: 12-, 16- и 21-квартирных. Для сборки 12-квартирного дома необходимо 70 деталей первого типа и 100 второго, для сборки 16-квартирного — 110 и 150 деталей, а для сборки 21-квартирного — 150 и 200 деталей соответственно. Всего имеется 900 деталей первого вида и 1300 второго. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир в них было наибольшим?

Вариант 9

У9.1 (ВМК, 2002) Найти все a, при которых уравнение

$$a^4x + a^2 + (2+\sqrt{2})a + 2\sqrt{2} = a^2(a+\sqrt{2}) + 4x$$

имеет бесконечно много корней.

У9.2 (физфак, 2000) При каких значениях a неравенство

$$(x^2 - (a+8)x - 6a^2 + 24a)\sqrt{3-x} \le 0$$

имеет единственное решение?

У9.3 (физфак, 2005) Для каждого допустимого значения a решить неравенство

$$\log_{2ax}(a/4) \cdot \log_{a^2-10}(a-3) < 0.$$

У9.4 (ФНМ, 2003) Найти количество членов арифметической прогрессии a_1, ..., a_{81} с первым членом $\pi/4$ и разностью $3\pi/10$, для которых система

$$\begin{cases} x\sin a_n + y\cos a_n = 1 \\ x\operatorname{tg} a_n - y\operatorname{ctg} a_n = 1 \end{cases}$$

не имеет решений.

У9.5 (экономисты, 1990) Найти натуральные числа a, b и c, образующие возрастающую геометрическую прогрессию с целочисленным знаменателем и максимальной суммой при условии, что b и c — делители чисел 2240 и 4312 соответственно.

Вариант 10

У10.1 (географы, 1992) Найти все значения параметра c, при которых уравнение

$$|x^2-1| + |x^2-x-2| = x^2 + 3x + c$$

имеет ровно три различных решения.

У10.2 (физфак, 2001) Для любого значения a решить неравенство

$$5(2a+x) + 9a\sqrt{2a+x} - 2a^2 > 0.$$

У10.3 (физфак, 2007) Для каждого значения a из промежутка $(-3; 0)$ найти число различных решений уравнения

$$(2x^2 - 5ax + 2a^2)\sqrt{x - \frac{2}{a}} = 0.$$

У10.4 (географы, 2003) Найти все a, при которых уравнение

$$(\sin x - \log_4 a)(\sin x - 2 + 2a) = 0$$

имеет на отрезке $[\pi/2; 5\pi/2]$ ровно два корня.

У10.5 (экономисты, 1996, переработка) В контейнер упакованы изделия трех типов общей массой 326 кг. Стоимость и масса одного изделия первого типа составляют 400 руб. и 12 кг, второго — 500 руб. и 16 кг, третьего — 600 руб. и 15 кг соответственно. Найти наименьшую и наибольшую возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере изделий.