Глава 9

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

§9.1. Конденсаторы и гальванические элементы

9.1.1. Электростатика проводников (напряженность внутри проводника, эквипотенциальность, заряд на поверхности). Конденсатор и его электроемкость. Вещества можно разделить на проводники и диэлектрики. В отличие от диэлектриков, внутри проводников имеются свободные электрические заряды. Эти заряды могут находиться в равновесии, если только напряженность поля внутри проводника равна нулю. Поэтому все точки проводника имеют один и тот же потенциал. По теореме Гаусса, нулевая напряженность внутри проводника может достигаться, только если электрический заряд внутри проводника отсутствует и располагается только на поверхности.

Важным элементом электрической цепи является конденсатор — система из двух проводников, один из которых заряжается положительным зарядом $+q$, а другой — отрицательным зарядом $-q$ (рис. 9.1).

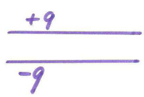

Рис. 9.1. ***

Поскольку при увеличении заряда вдвое потенциалы всех точек также увеличиваются в два раза, разность потенциалов на пластинах конденсатора $\Delta\varphi$ пропорциональна заряду q:

$$\Delta\varphi = \frac{q}{C}.$$

Коэффициент пропорциональности C называют *электрической емкостью* конденсатора.

9.1.2. Последовательное и параллельное соединение конденсаторов. Рассчитаем электроемкость системы из двух конденсаторов (емкости C_1 и C_2), соединенных последовательно или параллельно.

Начнем с последовательного соединения (рис. 9.2).

Заряды на пластинах первого конденсатора равны $+q$ и $-q$, второго конденсатора — также $+q$ и $-q$. Разность потенциалов на первом конденсаторе равна q/C_1, на втором конденсаторе — равна q/C_2; общая разность потенциалов

$$\Delta\varphi = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right).$$

Следовательно, электроемкость сложного конденсатора выражается из соотношения

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \Longleftrightarrow \quad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Исследуем параллельное соединение (рис. 9.3).

Разность потенциалов на обоих конденсаторах одинакова и равна $\Delta\varphi$. На пластинах первого конденсатора накапливаются заряды $+q_1$ и $-q_1$ ($q_1 = C_1\Delta\varphi$), второго конден-

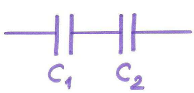

Рис. 9.2. ***

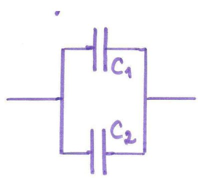

Рис. 9.3. ***

сатора — заряды $+q_2$ и $-q_2$ ($q_2 = C_2\Delta\varphi$). Следовательно, заряд на пластинах сложного конденсатора равен

$$q = q_1 + q_2 = (C_1 + C_2)\Delta\varphi,$$

а электрическая емкость равна

$$C = C_1 + C_2.$$

9.1.3. Работа в обратимом процессе перезарядки конденсатора; применение к расчету потенциальной энергии заряженного конденсатора. Пусть имеется конденсатор, заряженный до заряда q и разности потенциалов $\Delta\varphi = \frac{q}{C}$. Для увеличения заряда на dq требуется перенести электрический заряд dq с отрицательной пластины на положительную; для этого требуется совершить минимальную работу

$$\delta A = dq \cdot \Delta\varphi = dq \cdot \frac{q}{C}.$$

Общая минимальная работа, которую надо совершить для зарядки конденсатора от нулевого электрического заряда до заряда q_0, представляется в виде интеграла

$$A = \int\limits_0^{q_0} dq \frac{q}{C} = \frac{q_0^2}{2C}.$$

Эта работа имеет смысл потенциальной энергии [1] W заряженного конденсатора с зарядом q_0:

$$W(q) = \frac{q^2}{2C}. \tag{9.1}$$

9.1.4. Батарейка, ее энергия и ЭДС. Равновесие в цепи, состоящей из конденсатора и батарейки. Еще

[1] Если электроемкость конденсатора зависит от температуры, соотношение (9.1) перестает быть справедливым. Для исследования таких конденсаторов требуется глубокое знание термодинамики, выходящее за рамки школьной программы.

одним важным элементом электрических цепей является батарейка (рис. 9.4).

Она обладает следующим свойством: при прохождении через нее электрического заряда q в ней происходит химическая реакция, за счет которой изменяется энергия батарейки. При этом изменение энергии батарейки [1] пропорционально пройденному через батарейку электрическому заряду:

$$W = \mathrm{const} - \mathcal{E}q.$$

Коэффициент пропорциональности $\mathcal{E}$ называется ЭДС (электродвижущей силой) батарейки.

Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из батарейки и конденсатора (рис. 9.5).

Используя принцип минимума потенциальной энергии, определим, при каком значении электрического заряда q конденсатора система будет находиться в равновесии.

Суммарная потенциальная энергия системы зависит от заряда конденсатора q как

$$W_\Sigma(q) = \mathrm{const} - \mathcal{E}q + \frac{q^2}{2C}.$$

Она достигает своего минимального значения при

$$0 = \frac{dW_\Sigma}{dq} = -\mathcal{E} + \frac{q}{C} \quad \Longleftrightarrow \quad q = C\mathcal{E}.$$

[1] Приведенные рассуждения справедливы, только если ЭДС батарейки не зависит от температуры. Изучение батареек с зависящей от температуры ЭДС требует сведений из термодинамики, выходящих за рамки школьной программы.

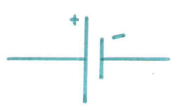

Рис. 9.4. ***

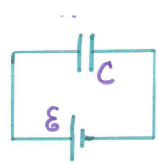

Рис. 9.5. ***

Таким образом, в равновесии *разность потенциалов на конденсаторе* равна ЭДС батарейки $\mathcal{E}$.

9.1.5. Расчет напряженности электрического поля и электроемкости плоского конденсатора. Плотность энергии электростатического поля. Влияние диэлектрической проницаемости на электроемкость. Рассчитаем характеристики простейшего из конденсаторов — плоского конденсатора. Он представляет из себя набор из двух параллельных плоских пластин площадью S, находящихся на малом расстоянии l друг от друга (рис. 9.6).

Пусть на одной из пластин размещен положительный заряд $+q$, а на другой — отрицательный заряд $-q$. Напряженность электрического поля плоской пластины составляет $2\pi k_{\text{эл}}q/S$. Внутри конденсатора, где поля пластин одинаково направлено, напряженность поля в два раза больше:

$$E = 4\pi k_{\text{эл}}\frac{q}{S}.$$

Вне конденсатора электрические поля от пластин компенсируются.

Разность потенциалов на пластинах конденсатора составляет

$$\Delta\varphi = El = 4\pi k_{\text{эл}}\frac{q}{S}l,$$

а электрическая емкость [1]

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{1}{4\pi k_{\text{эл}}}\frac{S}{l} \tag{9.2}$$

[1] Для упрощения формулы (9.2) используют обозначение $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi k_{\text{эл}}}$ — тогда $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{l}$.

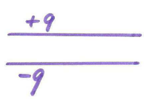

Рис. 9.6. ***

Представим энергию плоского конденсатора через напряженность электрического поля внутри него.

Имеем:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{C}{2}(\Delta\varphi)^2 = \frac{1}{8\pi k_{\text{эл}}}\frac{S}{l}(El)^2 = \frac{E^2}{8\pi k_{\text{эл}}}Sl. \qquad (9.3)$$

Полученное соотношение (9.3) показывает, что энергия, приходящаяся на единицу объема конденсатора, однозначно определяется напряженностью электрического поля в конденсаторе. Так возникло представление о том, что электростатическая энергия взаимодействия зарядов распределена в пространстве и заключена в электрическом поле.

Рассмотрим теперь конденсатор, полностью погруженный в диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε. Напряженность электрического поля такого конденсатора окажется во всех точках в ε раз меньше; в ε раз уменьшится и разность потенциалов, а электрическая емкость увеличится в ε раз и станет равной

$$C = \frac{1}{4\pi k_{\text{эл}}}\frac{l}{S} \cdot \varepsilon. \qquad (9.4)$$

Вывод формулы (9.4) был приведен для случая, когда диэлектрик занимает все пространство — и внутри, и снаружи конденсатора. Оказывается, однако, что соотношение (9.4) является справедливым и в случае, если диэлектрик находится только внутри конденсатора [1])

9.1.6. Методы расчета сил для конденсаторов. Сила взаимодействия пластин плоского конденсатора. Сила, действующая со стороны конденсатора на диэлектрическую пластину, частично вдвинутую в конденсатор. Равновесие в сложных системах, включающих как конден-

[1]) Чтобы обосновать это утверждения, надо прежде всего четко определить понятие диэлектрической проницаемости вещества, а не просто ограничиться частным случаем, когда диэлектрик заполняет все пространство.

саторы, так и механические системы, можно рассчитать с помощью принципа минимума потенциальной энергии.

В качестве первого примера рассмотрим систему, использующуюся для измерения силы взаимодействия пластин плоского конденсатора (рис. 9.7).

Пусть x — расстояние между пластинами конденсатора, $\pm q$ — заряды на пластинах конденсатора, S — площадь пластин, m — масса груза.

Потенциальная энергия системы складывается из энергии конденсатора $\dfrac{q^2}{2C} = \dfrac{q^2}{2} \cdot 4\pi k_{\text{эл}} \dfrac{x}{S}$ и потенциальной энергии груза в поле тяжести $-mgx$:

$$W_\Sigma = \left(\frac{q^2}{2S} \cdot 4\pi k_{\text{эл}} - mg \right) x.$$

При $\dfrac{q^2}{2S} \cdot 4\pi k_{\text{эл}} > mg$ расстояние между пластинами будет стремиться уменьшиться (груз будет подниматься), при обратном неравенстве — увеличиться (груз будет опускаться). Этот факт можно проинтерпретировать следующим образом: сила взаимодействия пластин конденсатора

$$F = \frac{q^2}{2S} \cdot 4\pi k_{\text{эл}}.$$

Рассмотрим теперь задачу о силе, втягивающей диэлектрик в конденсатор. Приведем пример системы, в которой можно измерить эту силу (рис. 9.8).

Пусть x — расстояние, на которое диэлектрическая пластина втянута в конденсатор, a — продольный размер обкладки конденсатора, b — поперечный размер, l —

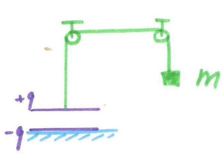

Рис. 9.7. ***

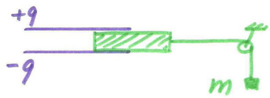

Рис. 9.8. ***

расстояние между пластинами конденсатора, $\pm q$ — заряд на пластинах конденсатора.

Обозначим через $W(x)$ энергию конденсатора в зависимости от x. Общая энергия системы складывается из энергии конденсатора и энергии груза:

$$W_\Sigma(x) = W(x) + mgx.$$

Расстояние x будет стремиться увеличиться (а груз подняться), если потенциальная энергия системы при этом будет убывать:

$$0 > \frac{dW_\Sigma}{dx} = \frac{dW}{dx} + mg \quad \Longleftrightarrow \quad mg < -\frac{dW}{dx}.$$

Аналогично, при $mg > -\dfrac{dW}{dx}$ груз будет стремиться опуститься. Этот результат можно проинтерпретировать следующим образом: сила, с которой диэлектрик втягивается в конденсатор, равна

$$F = -\frac{dW}{dx}.$$

Рассчитаем данную производную. Учтем, что $W = \dfrac{q^2}{2C}$, а C зависит от x. Имеем: $dW = \dfrac{q^2}{2} dC^{-1} = -\dfrac{q^2}{2} C^{-2} dC$; отсюда

$$F = \frac{q^2}{2C^2} \frac{dC}{dx}.$$

Найдем зависимость электроемкости конденсатора от x. Рассматриваемый конденсатор можно заменить на два параллельно соединенных конденсатора (рис. 9.9).

Поскольку электроемкости конденсаторов известны

$$C_1 = \frac{1}{4\pi k_{\text{эл}}} \frac{(a-x)b}{l}, \qquad C_2 = \frac{1}{4\pi k_{\text{эл}}} \frac{xb}{l} \varepsilon,$$

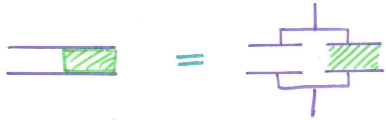

Рис. 9.9. ***

имеем:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{1}{4\pi k_{\text{эл}}}\frac{ab}{l} + \frac{1}{4\pi k_{\text{эл}}}\frac{b}{l}(\varepsilon - 1)x.$$

Тогда

$$\frac{dC}{dx} = \frac{1}{4\pi k_{\text{эл}}}\frac{b}{l}(\varepsilon - 1)$$

и

$$F = \frac{q^2}{2C^2}\frac{1}{4\pi k_{\text{эл}}}\frac{b}{l}(\varepsilon - 1).$$

§9.2. Электрический ток

9.2.1. Понятие о магнитном действии электрического тока. Сила электрического тока и ее измерение. Что происходит при соединнении положительного и отрицательного полюсов батарейки? В начале XIX века считалось, что между полюсами возникает "электрический конфликт", который приводит к нагреванию проволоки, соединившей полюса.

В 1820 году Эрстед обратил внимание, что "электрический конфликт"действует на стрелку компаса, — появилась возможность по величине отклонения стрелки определять "степень интенсивностиэлектрического конфликта". Проведя ряд опытов, Ампер выдвинул предположение о том, что "конфликт"связан с упорядоченным движением заряженных частиц от одного полюса батарейки к другому — электрическим током.

Мерой интенсивности электрического тока является сила тока (поток электрического заряда) — величина электрического заряда, протекающего через площадку за единицу времени. В системе СИ единица измерения электрического тока называется ампером: это 1 А = 1 Кл/с (кулон, деленный на секунду).

Согласно опытам Ампера, силу электрического тока можно измерить по магнитному взаимодействию проводника с током и магнита.

9.2.2. Исследования Ома по прохождению тока через проводник. Понятие сопротивления. Закон Ома и правила Кирхгофа. Идеальные и неидеальные батарейки. Идеальные и неидеальные вольтметр и амперметр; идеальный и неидеальный диод. Понятие вольтамперной характеристики элемента. Вскоре после появления приборов для измерения силы тока, Ом (1826) провел исследования зависимости силы электрического тока I, протекающего через проводник, от приложенной разности потенциалов U [1] (рис. 9.10).

Ом обнаружил, что сила тока пропорциональна разности потенциалов:

$$I = \frac{U}{R}.$$

Коэффициент пропорциональности R называют сопротивлением проводника. Единицу измерения сопротивления назвали омом: 1 Ом = 1 В/А (один ом — это один вольт, деленный на ампер).

[1] Различные разности потенциалов были получены с использованием термоэлемента, создающего в зависимости от разности температур разные ЭДС

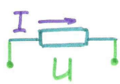

Рис. 9.10. ***

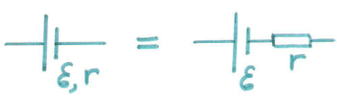

Рис. 9.11. ***

Развивая закон Ома, Кирхгоф (1840е) предложил следующие правила расчета электрических цепей:

- электрический заряд, втекающий за единицу времени в данную точку цепи, равен злектрическому заряду, вытекающему из этой точки цепи;
- разность потенциалов на резисторе сопротивления R при силе тока I равна IR; при этом ток течет от точки с более высоким потенциалом к точке с более низким потенциалом;
- разность потенциалов на полюсах идеальной батарейки равна ее ЭДС; более высокий потенциал имеет положительная обкладки батарейки;
- неидеальную батарейку можно рассматривать как совокупность идеальной батарейки и сопротивления (рис. 9.11).

Используя правила Кирхгофа, можно решать задачи на электрические цепи, состоящие из батареек и резисторов.

Важными элементами электрических цепей являются электроизмерительные приборы: амперметры и вольтметры (рис. 9.12).

Амперметр показывает силу тока, через него протекающего, вольтметр — разность потенциалов на нем. У идеального амперметра сопротивление равно нулю (разность потенциалов нулевая), у идеального вольтметра — бесконечности (сила тока нулевая). Неидеальные амперметр и вольтметр обычно рассматривают как резисторы с конечными сопротивлениями.

Одним из элементов электрических цепей является диод (рис. 9.13). У идеального диода сопротивление равно нулю

Рис. 9.12. ***

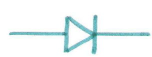

Рис. 9.13. ***

при прохождении тока в одном направлении (изображенном стрелкой) и бесконечности в противоположном.

Неидеальные диоды и другие нелинейные элементы обычно описываются *вольтамперной характеристикой* — зависимостью разности потенциалов на элементе от силы тока через элемент.

9.2.3. Последовательное и параллельное соединение сопротивлений. Зависимость сопротивления проводника от его длины и толщины. Удельное сопротивление. Связь плотности электрического тока и напряженности электрического поля (закон Ома в дифференциальной форме). Применим правила Кирхгофа для исследования последовательного и параллельного соединения сопротивлений. В каждом случае мы найдем зависимость протекающей через сложный элемент силы электрического тока I от разности потенциалов U на концах элемента.

Начнем с последовательного соединения резисторов с сопротивлениями R_1 и R_2 (рис. 9.14).

Разность потенциалов на концах резистора R_1 равна IR_1, на концах резистора R_2 — равна IR_2. Следовательно, разность потенциалов на концах сложного элемента

$$U = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2).$$

Таким образом, два последовательно соединенных резистора можно заменить на один резистор с сопротивлением $R = R_1 + R_2$.

Пусть теперь резисторы сопротивлениямит R_1 и R_2 соединены параллельно (рис. 9.15).

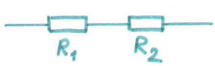

Рис. 9.14. ***

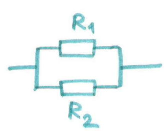

Рис. 9.15. ***

Сила тока через первый резистор равна U/R_1, через резистор R_2 — равна U/R_2; поэтому общая сила тока

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Таким образом, два параллельно соединенных резистора можно заменить на один резистор с сопротивлением R, определяемым из соотношения

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \Longleftrightarrow \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Поскольку проводник длиной n метров можно рассматривать как n последовательно соединенных проводников длиной 1 метр, сопротивление проводника в n метров в n раз больше сопротивления проводника в 1 метр. Следовательно, сопротивление проводника пропорционально его длине.

Проводник площадью поперечного сечения nS можно представить как n проводников площадью поперечного сечения S, соединенных параллельно. Следовательно, сопротивление проводника площадью сечения nS в n раз меньше сопротивления проводника площадью сечения S — сопротивление проводника обратно пропорционально площади его поперечного сечения S.

Таким образом, сопротивление R проводника зависит от его длины l и площади поперечного сечения S как

$$R = \rho\frac{l}{S}.$$

Коэффициент пропорциональности ρ называют удельным сопротивлением проводника.

Используя понятие плотности потока электрического заряда $\overrightarrow{J}_Q$ (или плотности тока), запишем закон Ома в дифференциальной форме для проводника длины l и площади сечения S. Сила электрического тока $J_Q S$ равна отношению разности потенциалов El к сопротивлению $\rho l/S$:

$$J_Q S = \frac{El}{\rho l/S} \quad \Longleftrightarrow \quad J_Q = \frac{1}{\rho}E.$$

Таким образом, плотность электрического тока пропорциональна напряженности электрического поля; коэффициент пропорциональности равен обратному удельному сопротивлению.

9.2.4. Превращение энергии в электрической цепи, состоящей из конденсатора и резистора. Закон Джоуля-Ленца. Исследуем процессы превращения энергии в электрической цепи, состоящей из конденсатора электроемкости C и резистора сопротивлением R. Предположим, что резистор обменивается энергией с окружающей средой (рис. 9.16).

При разрядке конденсатора его заряд изменяется на величину $dq = -Idt$. Следовательно, изменение энергии конденсатора составит

$$dW = d(\frac{q^2}{2C}) = \frac{q}{C}dq = -\frac{q}{C}Idt.$$

Согласно закону Ома, $\frac{q}{C} = IR$; отсюда

$$dW = -I^2Rdt.$$

Отобранная у конденсатора электрическая энергия должна передаться окружающей среде. Следовательно, при прохождении через резистор сопротивлением R тока силой I от резистора к окружающей среде передается энергия I^2Rdt.

Это утверждение было проверено экспериментально в опытах Джоуля и Ленца. Оно сыграло важную роль в установлении закона сохранения энергии.

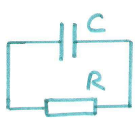

Рис. 9.16. ***

9.2.5. Исследование процесса разрядки конденсатора через резистор. Исследуем, как изменяется со временем заряд конденсатора в цепи, состоящей из резистора и конденсатора (рис. 9.16).

По закону Ома, сила тока через резистор, равная скорости изменения электрического заряда на конденсаторе — $-\frac{dq}{dt}$, совпадает с отношением разности потенциалов на резисторе q/C к сопротивлению:

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC}.$$

Следовательно, заряд конденсатора изменяется на dq за время

$$dt = -\frac{dq}{q}RC.$$

Время разрядки конденсатора от начального значения q_0 до конечного значения q_1 выражается через площадь под графиком (интеграл)

$$t_1 = \int\limits_{q_1}^{q_0} \frac{RC}{q}dq = RC\ln\frac{q_0}{q_1} \quad \Longleftrightarrow \quad q_1 = q_0 e^{-\frac{t_1}{RC}}.$$

Таким образом, заряд разряжающегося через резистор конденсатора зависит от времени по экспоненциальному закону

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}.$$

9.2.6. Электрический ток в металлах (отсутствие переноса вещества, электронная теория Лоренца, опыт Толмена и Стюарта) и электролитах (перенос вещества, постоянная Фарадея). Обсудим природу электрического тока в различных средах.

При прохождении электрического тока в металлах перенос вещества отсуствует. Этот факт подтверждается следующим опытом: электрический ток пропускается через спай из двух металлов — какие-либо признаки перемешивания металлов не наблюдаются.

Тот факт, что носителями электрического заряда в металле являются именно электроны, был подтвержден Толменом и Стюартом (1916). В опыте тормозилась металлическая катушка, после торможения носители заряда некоторое время продолжали движение — можно было измерить прошедший заряд и определить отношение заряда частицы — носителя заряда к массе. Оказалось, что это отношение совпадает с отношением заряда электрона к его массе.

В отличие от металлов, прохождение электрического тока через электролит сопровождается переносом вещества — носителями заряда являются ионы. Измеряя массу перетекшего вещества при пропускании тока через электролит, Фарадей в середине XIX века измерил важную физическую величину — заряд одного моля электронов (он совпадает с зарядом одного моля однозарядных ионов). Эта величина называется постоянной Фарадея. В дальнейшем с ее помощью был определен заряд электрона.