

## СТАТИКА И ЭЛЕКТРОСТАТИКА

### §5.1. Силы, зависящие от расстояния, и ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

Ранее мы вводили понятие потенциальной энергии системы, состоящей из грузов, блоков, рычагов, нитей и жидкостей в поле тяжести. Потенциальная энергия точечной массы  $m$  на высоте  $h$  полагалась равной  $mgh$ . Понятие потенциальной энергии использовалось при решении задач на равновесие: в состоянии устойчивого равновесия потенциальная энергия принимала наименьшее возможное значение.

Здесь мы обобщим понятие потенциальной энергии на системы с пружинами (линейными и нелинейными) и электрическими зарядами. Сначала подумаем над общим определением потенциальной энергии.

**5.1.1. Неравенство для приращения потенциальной энергии. Понятие об обратимом процессе.** Пусть имеется некоторая сложная система. Как ввести понятие ее потенциальной энергии таким образом, чтобы при работе простых механизмов потенциальная энергия не возрастала?

Пусть систему переводят из состояния «1» (с потенциальной энергией  $W_1$ ) в состояние «2» (с потенциальной энергией  $W_2$ ) — за счет подъема и опускания окружающих

систему тел в поле тяжести. Пусть затраченная работа равна  $A_{\text{затр}}^{1 \rightarrow 2}$ , а полезная работа — равна  $A_{\text{полезн}}^{1 \rightarrow 2}$ . Тогда потенциальная энергия системы изменится на величину  $W_2 - W_1$ , а потенциальная энергия грузов — на величину  $A_{\text{полезн}}^{1 \rightarrow 2} - A_{\text{затр}}^{1 \rightarrow 2}$ . Поскольку по своему смыслу потенциальная энергия системы вместе с окружающими телами не должна возрасти, должно выполняться неравенство:

$$(W_2 - W_1) + (A_{\text{полезн}}^{1 \rightarrow 2} - A_{\text{затр}}^{1 \rightarrow 2}) \leq 0,$$

или

$$W_2 - W_1 \leq A_{\text{затр}}^{1 \rightarrow 2} - A_{\text{полезн}}^{1 \rightarrow 2}. \quad (5.1)$$

Неравенство (5.1) позволяет оценить приращение потенциальной энергии сверху. Чтобы оценить  $W_2 - W_1$  снизу, следует рассмотреть аналогичный переход из состояния «2» в состояние «1»; тогда

$$W_1 - W_2 \leq A_{\text{затр}}^{2 \rightarrow 1} - A_{\text{полезн}}^{2 \rightarrow 1},$$

или

$$W_2 - W_1 \geq A_{\text{полезн}}^{2 \rightarrow 1} - A_{\text{затр}}^{2 \rightarrow 1}. \quad (5.2)$$

Используя неравенства (5.1) и (5.2), можно измерить приращение потенциальной энергии с погрешностью, равной

$$(A_{\text{затр}}^{1 \rightarrow 2} - A_{\text{полезн}}^{1 \rightarrow 2}) - (A_{\text{полезн}}^{2 \rightarrow 1} - A_{\text{затр}}^{2 \rightarrow 1}) = A_{\text{затр}}^{1 \rightarrow 2 \rightarrow 1} - A_{\text{полезн}}^{1 \rightarrow 2 \rightarrow 1}.$$

Чтобы эту погрешность сделать достаточно малой, следует провести такой циклический процесс  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ , в котором величина «потерянной работы»  $A_{\text{затр}}^{1 \rightarrow 2 \rightarrow 1} - A_{\text{полезн}}^{1 \rightarrow 2 \rightarrow 1}$  была бы мала. Стадии  $1 \rightarrow 2$  и  $2 \rightarrow 1$  такого процесса относят к *обратимым процессам*. Если же процесс  $1 \rightarrow 2$  нельзя достроить до процесса  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$  таким образом, чтобы потерянная работа была мала, процесс  $1 \rightarrow 2$  относят к необратимым.

**5.1.2. Нелинейная пружина. Потенциальная энергия нелинейной пружины как интеграл.** В качестве примера рассчитаем потенциальную энергию растянутой пружины.

Будем сначала рассматривать наиболее общий случай нелинейной пружины, которая при растяжении на  $x$  действует на прикрепленный к ней груз с силой  $F(x)$  (рис. 5.1).

Пусть в состоянии «1» пружина растянута на расстояние  $x_1$  с силой  $F_1 = F(x_1)$ , в состоянии «2» — на расстояние  $x_2 > x_1$  с силой  $F_2 = F(x_2)$ . Получим неравенства для приращения потенциальной энергии  $W_2 - W_1$  при переходе из состояния «1» в состояние «2» (рис. 5.2).

В состоянии «1» к пружине должен был быть подвешен груз массой  $m_1 = F_1/g$ . Чтобы перевести пружину в состояние «2», можно вместо груза массой  $m_1$  подвесить к ней груз массой  $m_2 = F_2/g$ . При этом он опустится на расстояние  $(x_2 - x_1)$  — будет затрачена работа

$$A_{\text{затр}}^{1 \rightarrow 2} = m_2 g(x_2 - x_1) = F_2(x_2 - x_1),$$

в то время как полезная работа будет равна нулю. Неравенство (5.1) примет вид:

$$W_2 - W_1 \leq F_2(x_2 - x_1). \quad (5.3)$$

Обратно, при переводе системы из состояния «2» в состояние «1» следует снять с пружины груз массой  $m_2$  и прикрепить к ней груз массой  $m_1$ . При его подъеме на расстояние  $(x_2 - x_1)$  будет совершена полезная работа

$$A_{\text{полезн}}^{2 \rightarrow 1} = m_1 g(x_2 - x_1) = F_1(x_2 - x_1),$$

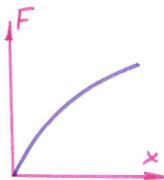


Рис. 5.1. \*\*\*



Рис. 5.2.  
\*\*\*

а затраченная работа будет равна нулю. Следовательно, согласно (5.2)

$$W_2 - W_1 \geq F_1(x_2 - x_1). \quad (5.4)$$

Полученные неравенства (5.3) и (5.4) можно изобразить графически: приращение потенциальной энергии больше площади фигуры, изображенной на рисунке слева, но меньше площади фигуры, изображенной на рисунке справа (рис. 5.3).

Чтобы увеличить точность в определении потенциальной энергии, следует нагружать пружину постепенно: разделить груз, прикрепляемый к пружине, на много частей, и после прикрепления к пружине каждой из частей дожидаться установления равновесия. Так же постепенно следует снимать нагрузку. Для такого процесса величина «потерянной работы» может быть сделана сколь угодно малой. Изменение потенциальной энергии  $W(x_0) - W(0)$  при переходе из состояния  $x = 0$  в состояние  $x = x_0$  будет больше площади фигуры, изображенной на рисунке слева, но меньше площади фигуры, изображенной на рисунке справа (рис. 5.4).

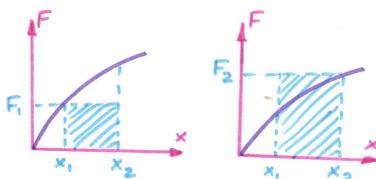


Рис. 5.3. \*\*\*

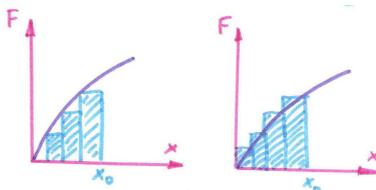


Рис. 5.4. \*\*\*

Следовательно,  $W(x_0) - W(0)$  является площадью фигуры, ограниченной графиком функции  $F(x)$ , осью абсцисс и прямой  $x = x_0$ ; используя обозначение для площади как интеграла, получим:

$$W(x_0) - W(0) = \int_0^{x_0} F(x) dx.$$

Обычно потенциальную энергию нерастянутой пружины принимают равной нулю; тогда

$$W(x_0) = \int_0^{x_0} F(x) dx.$$

**5.1.3. Линейная пружина (опыт Гука, потенциальная энергия).** При малых удлинениях  $x$  сила упругости  $F$ , с которой пружина действует на груз, пропорциональна  $x$ :

$$F = k_{\text{упр}} x. \quad (5.5)$$

Коэффициент пропорциональности  $k_{\text{упр}}$  называют *коэффициентом упругости* (жесткостью) пружины. Соотношение (5.5) было экспериментально получено в опытах Гука в конце XVII века: Гук подвешивал к пружине грузы разной массы и измерял удлинение пружины в зависимости от массы подвешиваемого груза.

Потенциальная энергия растянутой на расстояние  $x_0$  пружины равна площади под графиком функции  $F = F(x)$  (рис. 5.5).

Имеем:

$$W(x_0) = \int_0^{x_0} k_{\text{упр}} x dx = \frac{1}{2} k_{\text{упр}} x_0 \cdot x_0 = \frac{k_{\text{упр}} x_0^2}{2}.$$

**5.1.4. Понятие об электростатическом взаимодействии заряженных тел. Опыт Кулона. Понятие о единицах измерения электрического заряда. Диэлектрическая**

**проницаемость вещества.** Во второй половине XVIII века Кулон исследовал электростатическое взаимодействие заряженных тел. Используя для количественного измерения сил крутильные весы, Кулон установил, что сила взаимодействия точечных зарядов направлена вдоль прямой, соединяющей заряды, и обратно пропорциональна *квадрату расстояния* между зарядами. При этом имеются два типа зарядов, *разных по знаку*: заряды одного типа отталкиваются, разных типов — притягиваются.

Электростатическое взаимодействие тела с другими заряженными телами количественно характеризуется физической величиной — электрическим зарядом. Точечное тело 1 имеет заряд, в  $n$  раз больший тела 2, если оно действует на заряд 3 с такой же силой, с которой действуют  $n$  зарядов 2 на том же расстоянии от тела 3. Следовательно, сила взаимодействия зарядов *пропорциональна* их величинам.

Таким образом, выражение для величины силы электростатического взаимодействия точечных электрических зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , находящихся на расстоянии  $r$  друг от друга, можно представить в виде:

$$F = \frac{k_{\text{эл}} q_1 q_2}{r^2}. \quad (5.6)$$

*Электростатическая постоянная*  $k_{\text{эл}}$  зависит от выбора единицы измерения электрического заряда.

В предложенной в XIX веке Гауссом системе единиц электрический заряд измеряется в таких единицах, чтобы

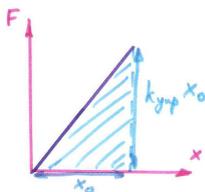


Рис. 5.5. \*\*\*

электростатическая постоянная равнялась единице. Однако в современной литературе чаще используется система единиц СИ, в которой для электрического заряда принята единица измерения 1 Кл (один кулон). Значение электростатической постоянной в этой системе единиц составляет

$$k_{\text{эл}} \simeq 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}.$$

Происхождение этой единицы измерения мы обсудим в дальнейшем при изучении электромагнитных явлений.

В случае, если электрические заряды взаимодействуют друг с другом не в вакууме, а в среде (которая считается заполняющей все пространство), сила взаимодействия между ними уменьшается в  $\epsilon$  раз и становится равной

$$F = \frac{k_{\text{эл}} q_1 q_2}{\epsilon r^2}.$$

Число  $\epsilon$  называется *диэлектрической проницаемостью среды*.

**5.1.5. Расчет потенциальной энергии взаимодействия точечных зарядов, находящихся на заданном расстоянии друг от друга.** Пусть два одноименных электрических заряда в состоянии "1" находятся на расстоянии  $r_1$  друг от друга и отталкиваются с силой  $F_1$ , а в состоянии "2"—на расстоянии  $r_2$  ( $r_2 > r_1$ ) и отталкиваются с силой  $F_2$ . Оценим сверху и снизу приращение потенциальной энергии  $W_1 - W_2$  при переходе из состояния "2" в состояние "1".

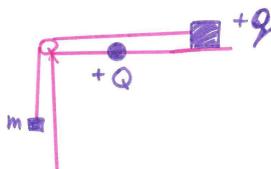


Рис. 5.6. \*\*\*

Рассмотрим экспериментальную установку, с помощью которой можно перевести систему зарядов из состояния "2" в состояние "1" и наоборот. Один из зарядов закреплен, к другому с помощью нити приложена сила  $mg$  (рис. 5.10).

При переходе из состояния "2" в состояние "1" следует отцепить от нити груз массой  $m_2 = F_2/g$  и прицепить к ней груз массой  $m_1 = F_1/g$  — он опустится на расстояние  $r_2 - r_1$  и будет затрачена работа

$$A_{\text{затр}}^{2 \rightarrow 1} = m_1 g (r_2 - r_1) = F_1 (r_2 - r_1).$$

При обратном переходе "1"  $\rightarrow$  "2" следует вместо груза массой  $m_1$  прикрепить к нити груз массой  $m_2$  — полезная работа окажется равной

$$A_{\text{полезн}}^{2 \rightarrow 1} = m_2 g (r_2 - r_1) = F_2 (r_2 - r_1).$$

Следовательно, приращение потенциальной энергии будет удовлетворять двойному неравенству

$$F_2 (r_2 - r_1) \leq W_1 - W_2 \leq F_1 (r_2 - r_1).$$

Оно больше площади фигуры, изображенной на рисунке слева, но меньше площади фигуры, изображенной на рисунке справа (рис. 5.7).

Нагружая и разгружая нить постепенно, за большое число шагов, можно добиться, чтобы величина потерянной

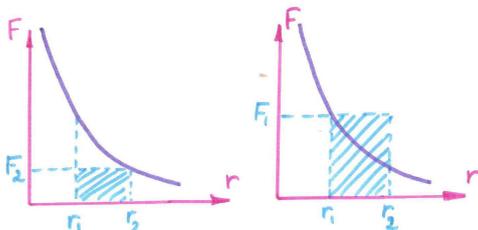


Рис. 5.7. \*\*\*

работы оказалась сколь угодно малой. Приращение потенциальной энергии  $W(r_-) - W(r_+)$  при переходе из состояния  $r = r_+$  в состояние  $r = r_-$  оказывается больше площади фигуры, изображенной слева, но меньше площади фигуры, изображенной справа (рис. 5.8).

Следовательно,

$$W(r_-) - W(r_+) = \int_{r_-}^{r_+} F(r) dr.$$

Используя закон Кулона (5.6), рассчитаем данный интеграл.

Имеем:

$$W(r_-) - W(r_+) = \int_{r_-}^{r_+} \frac{k_{\text{эл}} q_1 q_2}{r^2} dr = k_{\text{эл}} q_1 q_2 \int_{r_-}^{r_+} r^{-2} dr = k_{\text{эл}} q_1 q_2 (r_-^{-1} - r_+^{-1}).$$

В качестве начала отсчета потенциальной энергии взаимодействия электрических зарядов обычно выбирают состояние, в котором заряды находятся на очень большом расстоянии друг от друга. В этом случае

$$W(r) = \frac{k_{\text{эл}} q_1 q_2}{r}. \quad (5.7)$$

Если электрические заряды помещены в бесконечную среду с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , сила их взаимодействия при любом расстоянии между ними уменьшается в  $\epsilon$  раз — в это же количество раз уменьшается и потен-

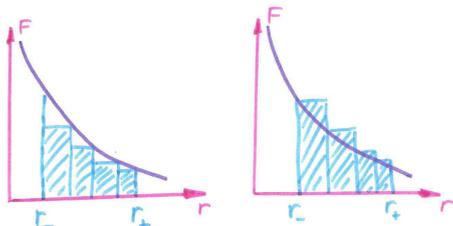


Рис. 5.8. \*\*\*

циальная энергия их взаимодействия.

$$W(r) = \frac{k_{\text{эл}}q_1q_2}{\varepsilon r}.$$

## §5.2. ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА МИНИМУМА ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим примеры исследования равновесия в механических системах на основе принципа минимума потенциальной энергии.

**5.2.1. Равновесие груза, подвешенного на линейной или нелинейной пружине.** Пусть груз массой  $m$  подвешен к пружине с известной зависимостью потенциальной энергии  $W$  от растяжения  $x$ . Найдем, при каком удлинении пружины потенциальная энергия системы из пружина и груза в поле тяжести окажется наименьшей (рис. 5.9).

Потенциальная энергия системы  $W_{\Sigma}$  складывается из потенциальных энергий пружины и груза в поле тяжести:

$$W_{\Sigma}(x) = W(x) - mgx.$$

В точке минимума функции  $W_{\Sigma}(x)$  ее производная обращается в нуль:

$$0 = \frac{dW_{\Sigma}}{dx} = \frac{dW}{dx} - mg.$$

Следовательно, система находится в равновесии, если

$$\frac{dW}{dx} = mg.$$

Поскольку в равновесии сила тяжести  $mg$ , приложенная к грузу, должна уравновешиваться силой упругости  $F(x)$ ,



Рис. 5.9. \*\*\*

приходим к соотношению, выражающему силу упругости через производную от потенциальной энергии:

$$F(x) = \frac{dW}{dx}.$$

Данное соотношение согласуется с определением потенциальной энергии.

В частности, для линейной пружины  $W(x) = \frac{k_{\text{упр}}x^2}{2}$  и  $F(x) = k_{\text{упр}}x$ .

### 5.2.2. Равновесие в системе электрических зарядов.

Рассмотрим систему из двух электрических зарядов. Зависимость их потенциальной энергии от расстояния между ними  $W(r)$  будем считать заданной. Пусть один из зарядов закреплен, а к другому приложена со стороны нити сила  $mg$ . Исследуем, при каком расстоянии  $r$  между зарядами данная система будет находиться в равновесии (рис. 5.10).

Потенциальная энергия системы  $W_{\Sigma}(r)$  складывается из потенциальной энергии взаимодействия зарядов  $W(r)$  и потенциальной энергии груза в поле тяжести  $mgr$ :

$$W_{\Sigma}(r) = W(r) + mgr.$$

В точке минимума производная этой функции обращается в нуль:

$$0 = \frac{dW_{\Sigma}}{dr} = \frac{dW}{dr} + mg.$$

Следовательно, равновесие в системе достигается при

$$\frac{dW}{dr} = -mg.$$

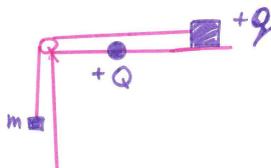


Рис. 5.10. \*\*\*

Поскольку в равновесии сила  $mg$ , приложенная к электрическому заряду, уравнивается силой электростатического отталкивания  $F(r)$ , приходим к соотношению, связывающему  $F$  и  $W$ :

$$F(r) = -\frac{dW}{dr}. \quad (5.8)$$

Соотношение (5.8) согласуется с формулой (5.7) для потенциальной энергии взаимодействия зарядов.

**5.2.3. Пример равновесия при наличии сил, действующих вдоль разных прямых.** Перейдем к исследованию системы, в которой на тело действуют силы, не лежащие на одной прямой. Пусть по гладкому вертикальному стержню может перемещаться муфта массой  $m$ , к которой прикреплена невесомая перекинутая через блок нить; к другому концу нити прикреплен свисающий груз массы  $M$  (рис. 5.11).

Обозначим расстояние между стержнем и блоком по горизонтали через  $a$ , между муфтой и блоком по вертикали — через  $z$  (муфта ниже блока), длину нити — через  $L$ . Найдем, при каком значении  $z$  система будет находиться в состоянии с наименьшей потенциальной энергией.

Поскольку груз располагается ниже блока на расстоянии  $L - \sqrt{a^2 + z^2}$ , потенциальная энергия системы, отсчитываемая от уровня блока, равна

$$W_{\Sigma}(z) = -mgz - Mg(L - \sqrt{a^2 + z^2}).$$

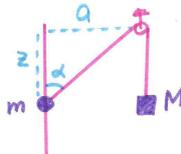


Рис. 5.11. \*\*\*

Для исследования функции  $W_{\Sigma}(z)$  на минимум рассчитаем ее производную:

$$\frac{dW_{\Sigma}}{dz} = -mg + \frac{Mg \cdot 2z}{2\sqrt{a^2 + z^2}}.$$

Она обращается в нуль при  $\frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \frac{m}{M}$ , отрицательна при меньших  $z$  и положительна при больших  $z$  — эта точка является точкой минимума потенциальной энергии.

Обозначим через  $\alpha$  угол между нитью и стержнем; тогда  $\cos \alpha = \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}$ . Следовательно, равновесие в системе достигается при

$$\cos \alpha = \frac{m}{M}.$$

При  $m \geq M$  потенциальная энергия будет все время уменьшаться при движении муфты вниз, и равновесие достигнуто не будет.

Полученное условие равновесия можно проинтерпретировать с точки зрения сил следующим образом. К муфте приложена сила тяжести  $m\vec{g}$ , направленная вниз, и сила натяжения нити  $\vec{T}$ , равная по модулю  $Mg$  и направленная под углом  $\alpha$  к стержню. Условие равновесия означает, что проекции на направление стержня векторов сил, приложенных к муфте, в сумме дают нуль:  $mg = Mg \cos \alpha$ .

### §5.3. РАБОТА СИЛЫ НА ПЕРЕМЕЩЕНИИ

**5.3.1. Изменение потенциальной энергии при малом перемещении тела, прикрепленного к нити или пружине.** Представим, что к телу приложена сила  $F$ , а тело перемещается на расстояние  $dl$  — под углом  $\alpha$  к направлению силы. При таком перемещении потенциальная энергия тела вместе с окружающими телами изменяется. Найдем это изменение для различных примеров сил.

Пусть к скользящему вдоль гладкого стержня легкому телу прикреплена нить, растянутая с силой  $F = mg$  —

с помощью груза массы  $m$ , прикрепленного к другому, свисающему концу нити (рис. 5.12).

Поскольку длина нити остается неизменной, при перемещении груза вдоль стержня на  $dl$  груз массой  $m$  опускается на  $dl \cdot \cos \alpha$  — его потенциальная энергия изменяется на

$$dW = -mgdl \cos \alpha = -Fdl \cos \alpha.$$

Пусть теперь вместо нити к грузу прикреплена пружина (рис. 5.13). При перемещении груза на  $dl$  длина пружины изменится на  $dx = -dl \cos \alpha$ . Изменение потенциальной энергии пружины составит

$$dW = -\frac{dW}{dx} dl \cos \alpha = -Fdl \cos \alpha.$$

Поскольку изменение потенциальной энергии тела вместе с окружающими телами однозначно определяется величинами силы и перемещения и углом между ними, для величины  $-dW \equiv \delta A$  ввели специальное название — *работа силы  $F$  на перемещении  $dl$* :

$$\delta A = Fdl \cos \alpha. \quad (5.9)$$

Если обозначить через  $d\vec{r}$  вектор перемещения тела, соотношение (5.9) можно представить через скалярное произведение векторов:

$$\delta A = (\vec{F} \cdot d\vec{r}).$$

**5.3.2. Момент силы, приложенной к плоской фигуре, закрепленной в точке: представление через работу при повороте; через силу, угол и расстояние до оси; через**

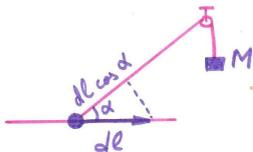


Рис. 5.12. \*\*\*

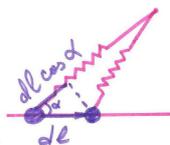


Рис. 5.13. \*\*\*

**силу и плечо. Сила как скользящий вектор.** Пусть плоская фигура закреплена в некоторой точке  $O$ , а в другой точке, на расстоянии  $r$  от оси  $O$ , приложена сила  $F$  под углом  $\alpha$  к радиусу (рис. 5.14).

При повороте плоской фигуры на угол  $d\varphi$  работа  $\delta A$  силы  $F$  оказывается пропорциональна углу поворота:

$$\delta A = M d\varphi.$$

Коэффициент пропорциональности  $M$  называется *моментом силы*  $F$  относительно оси  $O$ .

Выразим момент силы  $F$  через расстояние до оси  $r$  и угол  $\alpha$  между силой и радиусом (рис. 5.15).

При повороте фигуры на угол  $d\varphi$  точка приложения силы смещается на расстояние  $dl = r d\varphi$  под углом  $\pi/2 - \alpha$  к силе  $F$ . Работа силы на таком перемещении равна

$$\delta A = F \cdot r d\varphi \cdot \cos(\pi/2 - \alpha) = Fr \sin \alpha d\varphi.$$

Отсюда получаем выражение для момента силы:

$$M = Fr \sin \alpha.$$

Величина  $F \sin \alpha$  называется *плечом* силы  $F$ . Оно равно длине перпендикуляра, опущенного из оси вращения  $O$  на линию, вдоль которой действует сила  $F$  (рис. 5.16).

Таким образом, действие силы на тело характеризуется не только величиной и направлением, но и прямой, вдоль которой эта сила действует. Две равные по величине и направлению силы, лежащие на разных прямых, будут по-разному действовать на плоскую фигуру: их моменты будут различны. В то же время, вектор силы можно па-



Рис. 5.14. \*\*\*

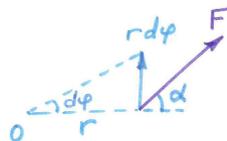


Рис. 5.15. \*\*\*

параллельно переносить вдоль прямой, по которой эта сила действует.

В математике векторы, которые можно параллельно переносить только вдоль направления вектора, но не вдоль других прямых, относят к *скользящим векторам*. Как вытекает из изложенного, сила является важным примером скользящего вектора в физике.

### 5.3.3. Работа нескольких сил, приложенных к телу.

**Векторное сложение сил и моментов.** Предположим, что к телу приложены силы  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ , ..., действующие в различных направлениях. Тогда при поступательном перемещении тела на  $d\vec{r}$  потенциальная энергия тела вместе с окружающими телами изменится на  $-(\vec{F}_1 \cdot d\vec{r})$  за счет действия первой силы, на  $-(\vec{F}_2 \cdot d\vec{r})$  — за счет действия второй силы и т.д. За счет действия *всех* сил потенциальная энергия изменяется на

$$dW = -(\vec{F}_1 \cdot d\vec{r}) - (\vec{F}_2 \cdot d\vec{r}) - \dots = -((\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots) \cdot d\vec{r}).$$

Это изменение совпадает с взятой с обратным знаком работой *одной*, результирующей силы  $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots)$  на перемещении  $d\vec{r}$ . Таким образом, приложенные к телу силы *складываются как векторы*.

Аналогично, при вращении плоской фигуры на угол  $d\varphi$  вокруг оси  $O$  потенциальная энергия фигуры вместе с окружающими телами изменится на величину  $-M_1 d\varphi$  за счет действия первой силы, на  $-M_2 d\varphi$  за счет действия второй силы и т.д. За счет действия всех сил потенциаль-

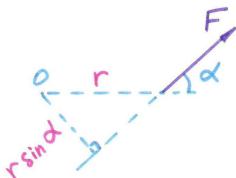


Рис. 5.16. \*\*\*

ная энергия изменится на

$$dW = -M_1 d\varphi - M_2 d\varphi - \dots = -(M_1 + M_2 + \dots) d\varphi.$$

Таким образом, моменты приложенных к телу сил складываются алгебраически.

Поскольку приложенные к плоской фигуре силы являются скользящими векторами, при сложении двух сил, приложенных в разных точках, следует сначала перенести эти силы вдоль линий их действия в одну точку, а затем — складывать по правилу параллелограмма (рис. 5.17).

**5.3.4. Работа по перемещению тела вдоль траектории.** Предположим, что тело перемещается вдоль криволинейного гладкого стержня из точки «1» в точку «2», и на него действует со стороны нити или пружины *переменная* сила  $\vec{F}(\vec{r})$ . Тогда для расчета работы этой силы следует разбить траекторию на большое количество маленьких участков, каждый из которых можно считать прямолинейным, и просуммировать работы на этих участках. Результат суммирования, являющийся *криволинейным интегралом* по траектории  $\langle\langle 1 \rangle\rangle \rightarrow \langle\langle 2 \rangle\rangle$ , обозначается как

$$A = \int_{\langle\langle 1 \rangle\rangle}^{\langle\langle 2 \rangle\rangle} (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \int_{\langle\langle 1 \rangle\rangle}^{\langle\langle 2 \rangle\rangle} \delta A.$$

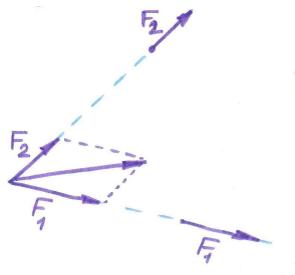


Рис. 5.17. \*\*\*

Согласно определению, данная работа равна взятому с обратным знаком изменению потенциальной энергии тела вместе с окружающими телами:

$$W_1 - W_2 = A = \int_{\langle\langle 1 \rangle\rangle}^{\langle\langle 2 \rangle\rangle} (\vec{F} \cdot d\vec{r}). \quad (5.10)$$

**5.3.5. Представление о потенциале и напряженности электростатического поля. Принцип суперпозиции полей. Разность потенциалов и криволинейный интеграл от напряженности электрического поля.** На точечное тело заряда  $q$  со стороны других электрических зарядов действует электростатическая сила  $\vec{F}$ , пропорциональная величине электрического заряда  $q$ :

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Коэффициент пропорциональности  $\vec{E}$  называется *напряженностью* электрического поля в точке, где находится данное тело.

Поскольку действующие на тело со стороны разных зарядов электростатические силы складываются как векторы, напряженности электрических полей, созданных различными зарядами, также складываются как векторы (это утверждение называют принципом суперпозиции полей).

Потенциальная энергия  $W$  взаимодействия точечного заряда  $q$  с окружающими зарядами также пропорциональна величине заряда  $q$ :

$$W = q\varphi.$$

Коэффициент пропорциональности  $\varphi$  называют *потенциалом* электростатического поля в точке, где находится данное тело. При этом потенциалы электростатических полей от разных источников складываются.

В системе СИ, где электрический заряд измеряется в кулонах, единица измерения электростатического потенциала называется вольт (1 В = 1 Дж/Кл).

Записывая соотношение (5.10) для электрического заряда  $q$ , взаимодействующего с другими зарядами, находим:

$$q(\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2)) = q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (\vec{E} \cdot d\vec{r}),$$

или

$$\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (\vec{E} \cdot d\vec{r}).$$

#### §5.4. ПОНЯТИЕ О МЕТОДЕ ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ

##### 5.4.1. Понятие о методе виртуальных перемещений.

Пусть некоторая система тел взаимодействует с окружающими телами. Равновесное состояние такой системы достигается, если потенциальная энергия  $W$  системы вместе с окружающими телами достигает минимального значения.

В точке минимума производная функции  $W$  по любому из параметров системы  $x$  должна обращаться в нуль. Это свойство можно записать в виде равенства

$$\frac{dW}{dx} = 0 \iff dW = 0 \iff \delta A = 0. \quad (5.11)$$

Таким образом, при малом перемещении системы из состояния равновесия приращение потенциальной энергии системы вместе с окружающими телами (как и работа приложенных к системе тел внешних сил) обращается в нуль.

Данный способ нахождения равновесного состояния системы получил название *метода виртуальных перемещений*.

**5.4.2. Условие равенства нулю геометрической суммы сил, приложенных к системе, и алгебраической суммы моментов сил.** Представим, что на тела системы действуют внешние силы  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$ . Пусть все тела системы перемещаются из состояния равновесия вдоль оси  $x$  на расстояние  $dx$ , которое может быть как положительным, так и отрицательным. Изменение потенциальной энергии системы вместе с окружающими телами составит

$$dW = -(F_{1x} + F_{2x} + \dots)dx.$$

Как вытекает из принципа минимума потенциальной энергии (соотношение (5.11)), в равновесии должно выполняться соотношение

$$F_{1x} + F_{2x} + \dots = 0. \quad (5.12)$$

Если система тел может поступательно перемещаться не только вдоль оси  $x$ , но и вдоль других координатных осей, условие минимума потенциальной энергии (5.12) можно будет записать и для проекций сил на другие оси:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = 0. \quad (5.13)$$

Если плоская фигура может вращаться вокруг некоторой точки  $O$ , изменение потенциальной энергии фигуры вместе с окружающими телами при повороте на угол  $d\varphi$  составит

$$dW = -(M_1 + M_2 + \dots)d\varphi,$$

где  $M_1, M_2, \dots$  — моменты сил, приложенных к плоской фигуре. Используя принцип минимума потенциальной энергии (5.11), получаем, что в равновесии

$$M_1 + M_2 + \dots = 0. \quad (5.14)$$

Если плоская фигура может совершать и поступательное, и вращательное движения, должно быть выполнено как условие равновесия (5.13), так и условие равновесия (5.14).

При этом правило моментов (5.14) можно записывать относительно любой точки, выбираемой в качестве оси.

**5.4.3. Равновесие в системе двух точечных тел. Понятие о третьем законе Ньютона в статике.** Представим, что проводится опыт по изучению взаимодействия точечных тел 1 и 2. Чтобы система находилась в равновесии, к телу 1 прикладывают внешнюю силу  $\vec{F}_1$ , к телу 2 — внешнюю силу  $\vec{F}_2$ . Эти силы могут быть измерены (рис. 5.18).

При этом сила  $\vec{F}_1$ , приложенная к первому телу, уравновешивается силой  $\vec{F}_{12}$ , с которой тело 2 действует на тело 1; сила  $\vec{F}_{21}$ , приложенная ко второму телу, уравновешивается силой  $\vec{F}_{21}$ , с которой тело 1 действует на тело 2:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_{12}, \quad \vec{F}_2 = -\vec{F}_{21}.$$

В соответствии с условиями равновесия (5.13) и (5.14), как сами силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , так и их моменты  $M_1$  и  $M_2$ , должны компенсироваться:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0, \quad M_1 + M_2 = 0.$$

Поэтому силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  должны быть равны по величине, противоположны по направлению и направлены вдоль одной прямой, соединяющей тела 1 и 2. Точно таким же свойствам должны удовлетворять и силы  $\vec{F}_{12}$  и  $\vec{F}_{21}$  взаимодействия тел 1 и 2.

Данное свойство сил взаимодействия тел называют *третьим законом Ньютона*. Мы видим, что в статике он может быть получен как следствие принципа минимума потенциальной энергии.



Рис. 5.18. \*\*\*

**5.4.4. Понятие о силах реакции связей.** Предположим, что тело может совершать поступательное движение не во всех направлениях, а только в некоторых (имеется *связь*). Например, тело может:

- перемещаться вдоль гладкого стержня (рис. 5.19);
- перемещаться вдоль гладкой поверхности (рис. 5.21);
- быть прикрепленным к нити или жесткому стержню (рис. 5.23).

Если к такому тело приложены внешние силы, оно согласно (5.12) будет находиться в равновесии, если скомпенсированы проекции сил на *направления возможных перемещений*.

Чтобы пользоваться векторным условием равновесия (5.13) при наличии связей, принимают, что на тело, помимо внешних сил, действует сила *реакции связи*  $\vec{N}$  (со стороны стержня, плоскости, нити), компенсирующая внешние силы:

$$\vec{N} = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots)$$

Используя данную концепцию и соотношение (5.12), получаем, что проекция силы реакции связи на направление, вдоль которого может перемещаться тело, равна нулю — сила реакции связи перпендикулярна возможным перемещениям тела.

В частности,

- для тела, перемещающегося вдоль гладкого стержня, сила реакции стержня перпендикулярна стержню (рис. 5.20);



Рис. 5.19. \*\*\*



Рис. 5.21. \*\*\*



Рис. 5.20. \*\*\*

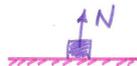


Рис. 5.22. \*\*\*

- для тела, перемещающегося по гладкой поверхности, сила реакции поверхности перпендикулярна поверхности (рис. 5.22);
- для тела, прикрепленного к легкой нити или легкому стержню, сила реакции направлена вдоль нити или стержня (рис. 5.24).

В ряде случаев тело может перемещаться в некоторых направлениях *только в одну сторону*. Лежащее на горизонтальном столе тело, подвешенный к вертикальной нити груз могут перемещаться по вертикали только вверх. Чтобы тело находилось в состоянии устойчивого равновесия, изменение потенциальной энергии тела вместе с окружающими телами  $dW$  должно быть при таком перемещении неотрицательным:  $dW \geq 0$ . Учитывая, что

$$dW = -((\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots) \cdot d\vec{r}) = (\vec{N} \cdot d\vec{r}),$$

получаем, что при таком перемещении

$$(\vec{N} \cdot d\vec{r}) \geq 0.$$

Следовательно, сила реакции гладкой поверхности направлена *от* поверхности, сила натяжения нити — *от тела к нити*<sup>1)</sup>



Рис. 5.23.  
\*\*\*



Рис. 5.24.  
\*\*\*

<sup>1)</sup> в отличие от нити, сила реакции жесткого легкого стержня может быть направлена вдоль стержня в любом из двух направлений

## §5.5. СИСТЕМЫ С ТРЕНИЕМ. ПОНЯТИЕ О КОНСЕРВАТИВНЫХ И НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМАХ

Принцип минимума потенциальной энергии позволяет исследовать равновесие в механических и электростатических системах разных типов. Однако у этого принципа имеются *границы применимости*: для систем с трением его использовать нельзя. При наличии трения система может находиться в равновесии и в случае, если ее потенциальная энергия неминимальна.

В то же время, как показывает опыт, условия равновесия системы тел (5.13) и (5.14), основанные на использовании понятия силы, оказываются применимы и при наличии трения — системы с трением исследуют с помощью сил, а не потенциальной энергии.

**5.5.1. Трение покоя. Опыт Амонтона. Коэффициент трения.** Для исследования явления трения Амонтон (1699) провел опыт, схема которого приведена на рисунке 5.25.

К находящемуся на шерховатой поверхности бруску массой  $M$  прикреплялась перекинутая через блок нить, на другом конце которой висел груз массой  $m$ . Как показал опыт, при достаточно малой массе  $m$  система находится в равновесии, и только начиная с некоторого "критического" значения  $m_0$  грузы приходят в движение. Амонтон исследовал зависимость массы  $m_0$  от массы бруска  $M$  и от площади  $S$  его соприкосновения с поверхностью. Оказалось,

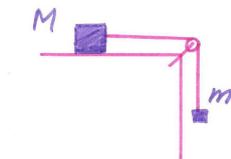


Рис. 5.25. \*\*\*

что  $m_0$  пропорциональна  $M$  и не зависит от  $S$ :

$$m_0 = k_{\text{тр}}M. \quad (5.15)$$

Коэффициент пропорциональности  $k_{\text{тр}}$  в формуле Амонтона (5.15) является *коэффициентом трения* бруска о поверхность.

Проанализируем результат Амонтона с точки зрения представления о силах. На брусок действуют: направленная горизонтально сила натяжения нити, равная по величине  $T = mg$ , действующая вертикально сила тяжести  $Mg$ , и сила со стороны поверхности. Чтобы брусок находился в равновесии, действующая на него со стороны поверхности сила  $\vec{F}$  должна представляться в виде суммы двух составляющих: вертикальной *силы нормального давления*  $\vec{N}$ , перпендикулярной поверхности ( $|\vec{N}| = Mg$ ), и горизонтальной *силы трения*, вектор которой  $\vec{F}_{\text{тр}}$  лежит в плоскости поверхности ( $|\vec{F}_{\text{тр}}| = mg$ ). Согласно опыту Амонтона, система находится в равновесии при  $m \leq k_{\text{тр}}M$ , или при

$$|\vec{F}_{\text{тр}}| \leq k_{\text{тр}}|\vec{N}|.$$

В частности, для гладкой поверхности  $k_{\text{тр}} = 0$ ; в этом случае сила реакции перпендикулярна поверхности.

**5.5.2. Понятие о консервативных и неконсервативных системах.** В настоящей главе мы рассмотрели два типа систем. Для одних можно использовать принцип минимума потенциальной энергии в равновесии, для других — нет.

Системы первого типа обладают следующим важным свойством: работа сил  $A_{1 \rightarrow 2}$ , действующих в системе при переходе из состояния "1" в состояние "2", равна согласно соотношению (5.10) взятому с обратным знаком изменению потенциальной энергии системы вместе с окружающими телами — работа не зависит от пути перехода  $1 \rightarrow 2$ . В частности, в циклическом процессе, когда система тел возвращается в прежнее состояние, работа сил, действующих

на тела системы, оказывается равной нулю:

$$A = 0 \quad \text{в цикле.} \quad (5.16)$$

Для систем с трением свойство (5.16) выполняться не будет: при перемещении тела по шерховатому столу по окружности работа сил трения окажется отрицательной.

Системы, для которых выполняется свойство (5.16), называются *консервативными*. Для них можно ввести понятие потенциальной энергии и с помощью принципа ее минимума исследовать равновесие. Для *неконсервативной* системы свойство (5.16) не выполняется; равновесие в такой системе с помощью принципа минимума потенциальной энергии исследовать нельзя.