Глава 4

# КИНЕМАТИКА НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ

## §4.1. Понятие о мгновенной скорости

**4.1.1. Средняя скорость изменения физической величины $A$ на заданном промежутке времени, ее геометрический смысл. Величина, изменяющаяся с постоянной скоростью.** Изучая физические процессы, мы исследуем зависимость физических величин от времени $t$. Чтобы охарактеризовать, насколько быстро изменялась величина $A$ на промежутке времени от $t_1$ до $t_2$, вводят понятие *средней скорости* изменения величины $A$ за этот промежуток времени, которая равна отношению приращения величины $A$ к величине промежутка:

$$v_A^{[t_1,t_2]} = \frac{A(t_2) - A(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Исследуем геометрический смысл понятия средней скорости. Построим график зависимости $A = A(t)$ и проведем прямую линию через точки графика с абсциссами $t = t_1$ и $t = t_2$ (рис. 4.1).

Угловой коэффициент этой прямой как раз и совпадет со средней скоростью изменения величины $A$ за данный промежуток.

Простейшим примером зависимости величины $A$ от времени является линейная:

$$A(t) = A_0 + v_A t.$$

В этом случае средняя скорость изменения величины за любой промежуток времени постоянна и равна $v_A$, а график зависимости $A(t)$ является прямой линией.

**4.1.2. Мгновенная скорость изменения физической величины $A$, ее геометрический смысл. Обозначение Лейбница для малого приращения.** Что следует понимать под скоростью изменения величины $A$ *в момент времени* $t_0$? Следует рассмотреть *очень малый* промежуток времени, содержащий момент $t_0$, и рассмотреть среднюю скорость изменения величины $A$ за этот промежуток — это и будет мгновенная скорость изменения величины $A$.

Если рассматривать в качестве данного промежутка интервал времени от $t_0$ до $t_0 + \Delta t$, для скорости $v_A$ получим:

$$v_A(t_0) = \frac{A(t_0 + \Delta t) - A(t_0)}{\Delta t}, \qquad \Delta t \text{ мало.}$$

Секущая, проходящая через две *очень близкие* точки графика, может рассматриваться как *касательная* (рис. 4.2).

Таким образом, скорость изменения величины $A$ в момент $t_0$ может рассматриваться как угловой коэффициент касательной к графику функции $A(t)$ при $t = t_0$.

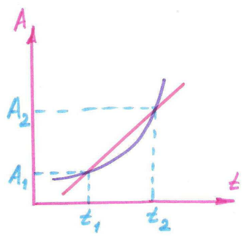


Рис. 4.1. ***

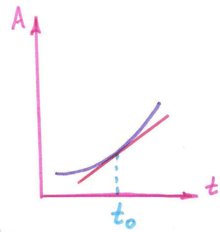


Рис. 4.2. ***

Для малых приращений величин Лейбниц предложил использовать обозначение $d$: $dt \equiv \Delta t$ — малый промежуток времени, $dA \equiv A(t+\Delta t) - A(t)$ — малое приращение величины $A$ [1]. В этих обозначениях выражение для мгновенной скорости изменения величины $A$ примет вид

$$v_A = \frac{dA}{dt}.$$

**4.1.3. Знак скорости изменения величины $A(t)$ и возрастание (убывание) функции $A(t)$. Метод Ферма исследования функций.** В случае, если скорость $v_A$ положительна, значение величины $A$ в последующий момент времени $t_0 + \Delta t$ больше, чем в предшествующий момент времени $t_0$. Следовательно, в этом случае функция $A(t)$ возрастает с течением времени. Обратно, при $v_A < 0$ фукнция $A(t)$ является убывающей.

Приходим к следующему способу исследования функции $A(t)$ на возрастание и убывание, предложенному Ферма. Следует рассчитать скорость изменения $dA/dt$ величины $A$ и найти, на каких промежутках она положительна, на каких — отрицательна. Это и будут промежутки возрастания и убывания функции.

**4.1.4. Приращение величины $A$ как площадь под графиком скорости. Понятие об интеграле. Формула Ньютона-Лейбница.** Как графически представить приращение величины $A$ на некотором промежутке времени от $t_1$ до $t_2$, если известна зависимость скорости от времени $v_A(t)$ на этом промежутке?

Сначала представим, что эта скорость постоянна. Тогда для приращения величины $A$ получим:

$$A(t_2) - A(t_1) = v_A \cdot (t_2 - t_1).$$

[1] Подчеркнем, что $dA$ — это единый неделимый символ, а не произведение числа $d$ на число $A$!

Правую часть данного соотношения можно представить как площадь [1] фигуры, ограниченной графиком скорости, осью абсцисс и вертикальными прямыми $t_1$ и $t_2$ (рис. 4.3):

Теперь представим, что график скорости является ступенчатой функцией, равной $v_{A1}$ на промежутке от $t_1$ до $t_2$, и $v_{A2}$ на промежутке от $t_2$ до $t_3$. Тогда приращение величины $A$ на всем промежутке от $t_1$ до $t_3$ окажется равным площади под графиком $v_A(t)$ (рис. 4.4):

В реалистичном случае, когда график зависимости скорости от времени является линией сложной формы, его можно *приближенно* представить набором из большого числа ступенек — площадь под таким графиком окажется равной изменению величины $A$ (рис. 4.5):

В математике площадь под графиком функции называют ее *интегралом*. Площадь [2] фигуры, ограниченной графи-

[1] при $v_A < 0$ эту площадь следует учитывать с отрицательным знаком!

[2] при $v_A < 0$ площадь считается отрицательной!

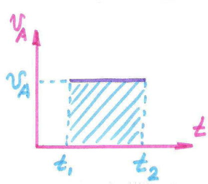


Рис. 4.3. ***

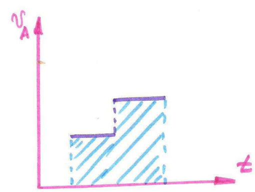


Рис. 4.4. ***

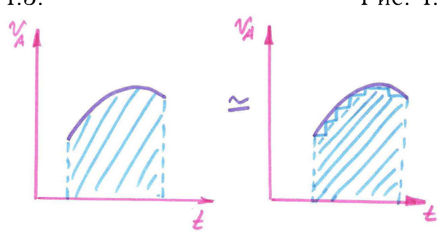


Рис. 4.5. ***

ком функции $v_A = v_A(t)$, осью $t$, вертикальными прямыми $t = t_-$ и $t = t_+$, обозначают как

$$\int\limits_{t_-}^{t_+} v_A(t)dt. \tag{4.1}$$

Смысл предложенного Лейбницем обозначения (4.1) заключается в следующем. Для рассмотренной выше ступенчатой функции $v_A(t)$ площадь под графиком равна сумме

$$v_{A1}(t_2 - t_1) + v_{A2}(t_3 - t_2) + \ldots$$

Знак интеграла $\int$ — вытянутая буква $S$, обозначающая сумму. Под знаком интеграла записано произведение $v_A(t)dt$: $v_A(t)$ обозначает скорость на данной ступени, $dt$ — промежуток времени, в течение которого скорость считается постоянной. Поскольку реалистичный график скорости состоит из совокупности большого числа *малых* ступенек, обозначение $dt$ для *малого* промежутка времени оправдано.

Тот факт, что приращение величины $A$ является площадью под графиком скорости, во введенных обозначениях можно записать следующим образом:

$$A(t_+) - A(t_-) = \int\limits_{t_-}^{t_+} v_A(t)dt,$$

или

$$A(t_+) - A(t_-) = \int\limits_{t_-}^{t_+} \frac{dA}{dt}dt. \tag{4.2}$$

Соотношение (4.2) называют *формулой Ньютона-Лейбница.*

**4.1.5. Мгновенная скорость и ускорение точечного тела, движущегося по прямой, плоскости, пространству. Перемещение и пройденный путь, их представление через площади под графиками.** Движение тела по прямой характеризуется зависимостью его координаты $x$ от времени

$t$. Важной характеристикой движения является *скорость* тела, определяемая как скорость изменения координаты:

$$v_x = \frac{dx}{dt}.$$

Еще одной характеристикой является *ускорение* — скорость изменения скорости тела:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}.$$

Движение тела по плоскости характеризуется зависимостью *двух* его координат от времени $(x(t), y(t))$, в пространстве — *трех* координат $(x(t), y(t), z(t))$. Для плоского и пространственного движений вводят *вектор скорости* с компонентами

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

и *вектор ускорения* с компонентами

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

Как вытекает из формулы Ньютона-Лейбница (4.2), перемещение тела вдоль любой из координатных осей является площадью под графиком проекции скорости

$$x(t_+) - x(t_-) = \int\limits_{t_-}^{t_+} v_x(t) dt,$$

а изменение проекции скорости — площадью под графиком ускорения:

$$v_x(t_+) - v_x(t_-) = \int\limits_{t_-}^{t_+} a_x(t) dt.$$

Выразим пройденный телом путь через зависимость его вектора скорости от времени. Сначала представим, что тело движется прямолинейно и равномерно. Тогда за время $\Delta t$ оно пройдет путь $\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_x^2}\,\Delta t = |\overrightarrow{v}|\Delta t$. В общем случае, когда движение тела неравномерно, следует разбить промежуток времени движения от $t_-$ до $t_+$ на большое число малых промежутков, в течение каждого из которых вектор скорости тела можно считать постоянным, и просуммировать пути, пройденные за каждый промежуток. Сумма большого числа слагаемых может рассматриваться как интеграл

$$s = \int\limits_{t_-}^{t_+} |\overrightarrow{v}(t)|dt. \tag{4.3}$$

Соотношение (4.3) является одним из способов *определить* длину траектории, по которой движется тело.

## §4.2. Движение с постоянным ускорением. Свободное падение

**4.2.1. Закон изменения компонент вектора скорости и координат тела при равноускоренном движении.** Простейшим примером движения с переменной скоростью является движение с постоянными компонентами ускорения $(a_x; a_y; a_z)$. При таком движении каждая из компонент скорости изменяется с постоянной скоростью

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x, \qquad \frac{dv_y}{dt} = a_y, \qquad \frac{dv_z}{dt} = a_z$$

и линейно зависит от времени:

$$v_x(t) = v_{x0} + a_x t, \qquad v_y(t) = v_{y0} + a_y t, \qquad v_z(t) = v_{z0} + a_z t. \tag{4.4}$$

Зависимость (4.4) также можно записать в векторном виде

$$\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{v}_0 + \overrightarrow{a} t.$$

Зависимость $x$-координаты тела от времени можно найти, рассчитав площадь под графиком $v_x(t)$.

За промежуток времени от 0 до $t_1$ перемещение тела вдоль оси $x$ составляет (рис. 4.6)

$$x(t_1) - x(0) = \int_0^{t_1} dt[v_{x0} + a_x t].$$

Фигура, ограниченная графиком функции $v_x(t)$, осью абсцисс и прямыми $t = 0$ и $t = t_1$, является трапецией с основаниями $v_{x0}$ и $v_{x0} + a_x t_1$, средней линией $v_{x0} + \frac{a_x t_1}{2}$ и высотой $t_1$. Ее площадь равна $\left(v_{x0} + \frac{a_x t_1}{2}\right) t_1$; отсюда

$$x(t_1) - x(0) = \left(v_{x0} + \frac{a_x t_1}{2}\right) t_1$$

и

$$x(t_1) = x(0) + v_{x0} t_1 + \frac{a_x t_1^2}{2}.$$

Приходим к выводу, что координата равноускоренно движущегося тела зависит от времени по закону

$$x(t) = x_0 + v_{x0} t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Чтобы проверить закон движения (4.2.1), покажем, что скорость тела, движущегося по данному закону, действительно линейно зависит от времени.

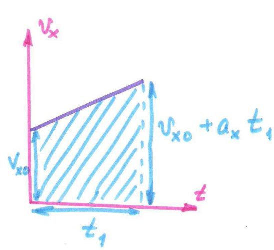


Рис. 4.6. ***

Рассмотрим моменты времени $t = t_0$ и $t = t_0 + \Delta t$. Координаты тела в эти моменты времени равны

$$x(t_0) = x_0 + v_{x0}t_0 + \frac{a_x t_0^2}{2},$$
$$x(t_0 + \Delta t) = x_0 + v_{x0}(t_0 + \Delta t) + \frac{a_x (t_0 + \Delta t)^2}{2}.$$

За промежуток времени от $t_0$ до $t_0 + \Delta t$ тело перемещается на расстояние

$$\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) = v_{x0}\Delta t + \frac{a_x}{2}[2t_0\Delta t + (\Delta t)^2]$$

со средней скоростью

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_{x0} + a_x t_0 + \frac{a_x \Delta t}{2}.$$

При малых $\Delta t$ полученное выражение для средней скорости становится равным

$$v_x(t_0) = v_{x0} + a_x t_0.$$

Это и есть мгновенная скорость тела в момент $t_0$.

Зависимость других координат тела от времени записывается аналогично (4.2.1):

$$y(t) = y_0 + v_{y0}t + \frac{a_y t^2}{2}, \qquad z(t) = z_0 + v_{z0}t + \frac{a_z t^2}{2}.$$

Объединяя законы изменения координат тела при равноускоренном движении, приходим к закону изменения радиус-вектора $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.$$

**4.2.2. Опыты Галилея по исследованию свободного падения тел. Независимость ускорения свободного падения от массы тела. Ускорение свободного падения как мера напряженности гравитационного поля Земли.** Исследовав экспериментально падение различных тел с высоты, Галилей на рубеже XVI — XVII веков установил, что это движение является равноускоренным [1]):

$$v = at.$$

При этом ускорение свободного падения $a \simeq 9,8$ м/с$^2$ *не зависит от массы тела* и является мерой напряженности гравитационного поля. Галилей установил этот факт экспериментально и обосновал логически с помощью следующего довода.

Пусть легкое и тяжелое тело падают за различное время. Тогда свяжем эти тела вместе. С одной стороны, составное тело имеет еще большую массу и должно падать быстрее; с другой стороны, легкое тело должно замедлить падение тяжелого. Получается противоречие.

**4.2.3. Зависимость скорости тела от координаты при свободном падении по прямой. Потенциальная и кинетическая энергия тела; их взаимное превращение при свободном падении. Происхождение единицы измерения потенциальной энергии 1 Дж.** Найдем, как зависит скорость свободно падающего без начальной скорости тела от пройденного пути $z$. Направив ось $z$ вниз и совместив начало координат с точкой старта, для скорости и перемещения тела находим:

$$v_z = at, \qquad z = \frac{at^2}{2}.$$

Отсюда

$$v_z = a\sqrt{\frac{2z}{a}} = \sqrt{2az}\,.$$

Исследуем превращения различных видов энергии тела массой $m$ при свободном падении. При уменьшении высоты тела на $H$ его потенциальная энергия уменьшится на $mgH$;

[1]) Галилей в качестве гипотез рассматривал и другие законы движения; однако экспериментально подтвердился именно закон равноускоренного движения

скорость увеличится от нуля до $v = \sqrt{2gH}$. Следовательно, уменьшение потенциальной энергии составит

$$-\Delta W = mgH = mg\frac{v^2}{2a} = \frac{g}{a} \cdot \frac{mv^2}{2}. \tag{4.5}$$

Величина

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

называется *кинетической энергией тела*. Соотношение (4.5) показывает, что уменьшение потенциальной энергии тела *пропорционально* увеличению кинетической энергии тела:

$$-\Delta W = \frac{g}{a}\Delta K. \tag{4.6}$$

Соотношение (4.6) упростится, если подобрать такую систему единиц, в которой числовое значение напряженности гравитационного поля $g$ $(1\ \frac{\text{кгс}\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{м}})$ станет равным числовому значению ускорения свободного падения $a$ $(9,8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2})$. Для этого в качестве единицы измерения потенциальной энергии следует выбрать *джоуль*, связанную с 1 кгс · м как

$$1\ \text{кгс}\cdot\text{м} = 9,8\ \text{Дж}.$$

В этом случае значение напряженности гравитационного поля $g$ становится равным $9,8\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{м}}$, а числовые значения $g$ и $a$ — совпадающими:

$$g = a. \tag{4.7}$$

Тогда соотношение (4.6) примет вид $-\Delta W = \Delta K$, или

$$W + K = \text{const}.$$

Таким образом, при данном подборе единиц измерения при свободном падении тела выполняется закон сохранения энергии: сумма кинетической и потенциальной энергий тела сохраняется.

Ввиду соотношения (4.7) мы будем далее обозначать ускорение свободного падения через $g$.

**4.2.4. Понятие о принципе относительности Галилея. Закон движения тела, брошенного под углом к горизонту в поле тяжести. Дальность полета тела. Кинетическая энергия тела в зависимости от высоты. Сохранение механической энергии при движении в поле тяжести .** Наблюдая за движением тел в каюте корабля, движущегося прямолинейно равномерно, Галилей обнаружил, что законы свободного падения тел на корабле такие же, как и на суше. Так Галилей пришел к своему знаменитому принципу относительности: никаким механическим экспериментом нельзя отличить, находится лаборатория в покое или же движется прямолинейно равномерно.

Установим с помощью принципа относительности Галилея закон движения тела, брошенного под углом к горизонту. Пусть тело движется в вертикальной плоскости $xy$, ось $x$ горизонтальна, ось $y$ вертикальна, компоненты начальной скорости тела равны $(v_{x0}; v_{y0})$, начало координат находится в точке старта.

Представим, что за данным экспериментом наблюдает пассажир корабля, движущегося в направлении горизонтальной оси $x$ со скоростью $v_{x0}$. С точки зрения этого пассажира, тело движется в поле тяжести по вертикали, с направленным вниз ускорением $g$, по закону

$$y(t) = v_{y0}t - \frac{gt^2}{2}. \tag{4.8}$$

Находящийся на суше наблюдатель видит, что тело, в дополнение к перемещению по вертикали, перемещается также по горизонтали со скоростью $v_{0x}$, по закону

$$x(t) = v_{0x}t. \tag{4.9}$$

Таким образом, движение брошенного под углом к горизонту тела происходит по закону (4.8), (4.9) — с постоянным ускорением $g$, направленным вниз.

Найдем дальность полета тела, брошенного со скоростью $v_0$ под углом $\alpha$ к горизонту.

Поскольку $v_{x0} = v_0 \cos\alpha$, $v_{y0} = v_0 \sin\alpha$, закон движения тела (4.9), (4.9) принимает вид:

$$x(t) = v_0 \cos\alpha t, \qquad y(t) = v_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2}.$$

Тело упадет на Землю ($y = 0$) в момент времени $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$; координата $x$ в этот момент будет равна дальности полета тела $l$:

$$l = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Определим теперь, как зависит кинетическая энергия тела от его высоты.

Для компонент скорости тела, движущегося с направленным вниз ускорением $g$, имеем:

$$v_x = v_{x0}, \qquad v_y = v_{y0} - gt.$$

Следовательно,

$$K = \frac{mv_x^2}{2} + \frac{mv_y^2}{2} = \frac{m}{2}\left[v_{x0}^2 + (v_{y0} - gt)^2\right] =$$
$$= \frac{m\left[v_{x0}^2 + v_{y0}^2\right]}{2} - mg\left(v_{y0}t - \frac{gt^2}{2}\right) = K_0 - mgy,$$

где $K_0 = \dfrac{m\left[v_{x0}^2 + v_{y0}^2\right]}{2}$ — начальная кинетическая энергия тела.

Таким образом, сумма кинетической и потенциальной энергий тела, брошенного под углом к горизонту, равная $K + mgy$, сохраняется.

## §4.3. Движение по окружности и колебания

### 4.3.1. Закон движения тела по окружности с постоянной и переменной угловой скоростью. Период обращения. Гармонические колебания: амплитуда, частота,

**фаза.** Простейшим примером криволинейного движения является движение по окружности радиуса $R$. Запишем зависимость координат тела от времени при таком движении. Выберем начало координат в центре окружности, обозначим угол, образованный радиусом и осью $x$, через $\varphi(t)$ (рис. 4.7).

Тогда

$$x(t) = R\cos\varphi(t), \qquad y(t) = R\sin\varphi(t).$$

Считается, что тело движется по окружности *с постоянной угловой скоростью* $\omega$, если угол $\varphi$ линейно зависит от времени:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t.$$

В этом случае движение тела *периодично*: через промежуток времени $T = 2\pi/\omega$, называемый *периодом обращения*, угол $\varphi$ изменяется на $2\pi$ радиан (или 360 градусов), и тело возвращается в прежнюю точку.

Каждая из координат движущегося по окружности с постоянной скоростью тела совершает *гармонические колебания*. В общем случае говорят, что физическая величина $A$ колеблется по гармоническому закону, если ее зависимость от времени имеет вид

$$A(t) = A_0\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Величина $A_0$ называется *амплитудой* колебаний, $\omega t + \varphi_0$ — *фазой* колебаний, $\omega$ — *круговой частотой*, $\varphi_0$ — *начально-*

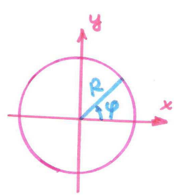


Рис. 4.7. ***

*ной фазой*, $T = 2\pi/\omega$ — *периодом* колебаний, $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$ — *частотой* колебаний.

**4.3.2. Сложение гармонических колебаний методом векторных диаграмм и сложение круговых движений.** При исследовании колебательных процессов возникает задача о сложении двух величин $A$ и $B$, совершающих гармонические колебания:

$$A(t) = A_0\cos(\omega t + \alpha_0), \qquad B(t) = B_0\cos(\omega t + \beta_0).$$

Обозначим сумму этих величин как

$$C(t) = A(t) + B(t);$$

покажем, что она совершает гармонические колебания с той же круговой частотой $\omega$, найдем их амплитуду и фазу.

Вместо сложения двух скалярных величин удобно складывать два вектора $\vec{A}(t)$ и $\vec{B}(t)$ с компонентами

$$\begin{aligned} A_x &= A_0\cos(\omega t + \alpha_0); \quad A_y = A_0\sin(\omega t + \alpha_0);\\ B_x &= B_0\cos(\omega t + \beta_0); \quad B_y = B_0\sin(\omega t + \beta_0). \end{aligned}$$

Каждый из векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ совершает вращательное движение с угловой скоростью $\omega$ (рис. 4.8).

Следовательно, их сумма также вращается с угловой скоростью $\omega$ и зависит от времени по закону

$$C_x = C_0\cos(\omega t + \gamma_0); \qquad C_y = C_0\sin(\omega t + \gamma_0).$$

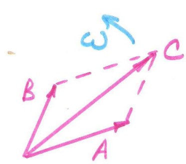


Рис. 4.8. ***

При этом длина вектора $\overrightarrow{C}$ и начальный угол $\gamma_0$ определяются из соотношений:

$$C_0 \cos\gamma_0 = A_0 \cos\alpha_0 + B_0 \cos\beta_0; \qquad C_0 \sin\gamma_0 = A_0 \sin\alpha_0 + B_0 \sin\beta_0.$$

Величина $C(t)$, совпадающая с $C_x(t)$, колеблется по гармоническому закону.

**4.3.3. Вектор мгновенной скорости тела, движущегося по окружности (направление перпендикулярно радиусу, величина пропорциональна мгновенной угловой скорости, зависимость компонент от времени).** Найдем вектор мгновенной скорости тела, движущегося по окружности радиуса $R$. Пусть за малый промежуток времени оно прошло дугу $\Delta\varphi$. Расположим начало координат в центре окружности и введем координатные оси $x$ и $y$ таким образом, чтобы ось $x$ прошла через середину дуги (рис. 4.9).

При рассмотренном перемещении $x$-координата тела не меняется, а $y$-координата — увеличивается на

$$\Delta y = 2R \sin\frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Учитывая, что синус малого угла приближенно равен радианной мере этого угла, находим $\sin\frac{\Delta\varphi}{2} \simeq \frac{\Delta\varphi}{2}$ и

$$\Delta y = R\Delta\varphi.$$

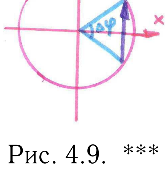


Рис. 4.9. ***

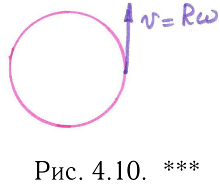


Рис. 4.10. ***

Следовательно, компоненты средней скорости за рассматриваемый промежуток времени оказываются равными

$$v_x = 0, \qquad v_y = R\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Считая промежуток времени $\Delta t \equiv dt$ достаточно малым, введем обозначение для мгновенной угловой скорости тела:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Следовательно, компоненты мгновенной скорости тела равны (рис. 4.10)

$$v_x = 0, \qquad v_y = R\omega.$$

Таким образом, вектор мгновенной скорости $\overrightarrow{v}$ тела, движущегося по окружности, направлен по касательной к окружности (перпендикулярно радиусу) и равен по величине $|\overrightarrow{v}| = v = R\omega$. Перпендикулярность скорости радиусу можно записать в виде соотношения

$$(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{r}) = 0. \tag{4.10}$$

Исследуем зависимость компонент скорости тела от времени в неподвижной системе координат (рис. 4.11).

Имеем:

$$v_x = -R\omega \sin\varphi, \qquad v_y = R\omega\cos\varphi.$$

**4.3.4. Скорость изменения величины, совершающей гармонические колебания. Ускорение тела, движущегося по окружности с постоянной угловой скоростью.** Пусть

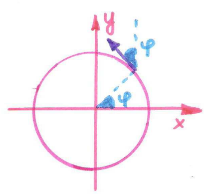


Рис. 4.11. ***

тело движется по окружности радиуса $R$ с угловой скоростью $\omega$. Тогда $x$-координата тела колеблется по гармоническому закону с амплитудой $R$ и начальной фазой $\varphi_0$

$$x(t) = R\cos(\omega t + \varphi_0), \tag{4.11}$$

Как показано выше, скорость изменения величины $x$ также совершает гармонические колебания

$$v_x(t) = -R\omega\sin(\omega t + \varphi_0) = R\omega\cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}) \tag{4.12}$$

с амплитудой $R\omega$ и увеличенной на $\frac{\pi}{2}$ начальной фазой.

Аналогично, скорость изменения любой величины $A$, совершающей гармонические колебания с амплитудой $A_0$ и начальной фазой $\alpha_0$

$$A(t) = A_0\cos(\omega t + \alpha_0),$$

будет совершать гармонические колебания с амплитудой $A_0\omega$ и начальной фазой $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{dA}{dt} = A_0\omega\cos(\omega t + \alpha_0 + \frac{\pi}{2}).$$

Если $x$-компонента скорости тела совершает гармонические колебания с амплитудой $R\omega$ и начальной фазой $\varphi_0 + \frac{\pi}{2}$, $x$-компонента ускорения тела будет также совершать гармонические колебания с амплитудой $R\omega^2$ и начальной фазой $\varphi_0 + \pi$, увеличенной еще на $\pi/2$:

$$a_x(t) = R\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi) = -R\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x. \tag{4.13}$$

Аналогично, $a_y = -\omega^2 y$, — вектор ускорения тела, движущегося по окружности радиуса $R$ с угловой скоростью $\omega$, имеет вид $\overrightarrow{a} = -\omega^2\overrightarrow{r}$, равен по величине $\omega^2 R$ и направлен к центру окружности.

Этот факт можно проиллюстрировать графически. Изобразим на одном рисунке траекторию движения тела и векторы его скорости в разные моменты времени, на другом —

закон изменения вектора скорости тела со временем (он равен по величине $R\omega$ и вращается с угловой скоростью $\omega$) и вектор ускорения (рис. 4.12).

**4.3.5. Зависимость проекций скорости и ускорения точечного тела, совершающего гармонические колебания, от координаты.** Пусть тело совершает гармонические колебания вдоль оси $x$ по закону (4.11). Поскольку проекция скорости тела на ось $x$ колеблется по закону (4.12), из свойства $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ получим:

$$v_x^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 R^2 = \text{const}.$$

Таким образом, в отличие от свободного падения, при гармонических колебаниях квадрат скорости тела линейно зависит не от координаты, а от ее квадрата.

Что касается ускорения, то, согласно (4.13), оно пропорционально координате:

$$a_x = -\omega^2 x.$$

**4.3.6. Ускорение тела, движущегося по окружности с переменной угловой скоростью. Центростремительное и тангенциальное ускорения. Кинематическая связь для ускорения.** Пусть тело движется по окружности с переменной угловой скоростью. Найдем вектор его ускорения.

Изобразим векторы скорости тела в моменты времени $t_0$ и $t_0 + \Delta t$. Эти векторы повернуты друг относительно друга на угол $\Delta\varphi \simeq \omega\Delta t$ и равны по величине $R\omega$ и

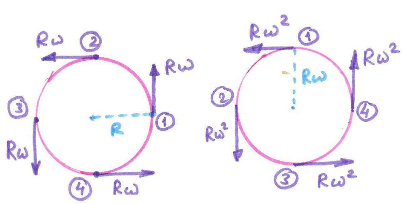


Рис. 4.12. ***

$R(\omega+\Delta\omega)$ соответственно. Направим ось $y$ вдоль вектора скорости в момент $t_0+\Delta t$ (рис. 4.13):

Изменения компонент скорости тела оказываются равны:

$$\Delta v_x = -R\omega\sin\Delta\varphi \simeq -R\omega\Delta\varphi = -R\omega^2\Delta t;$$
$$\Delta v_y = R(\omega+\Delta\omega) - R\omega\cos\Delta\varphi \simeq R\Delta\omega,$$

здесь учтено, что синус малого угла приближенно равен радианной мере этого угла, а косинус — равен единице.

Для компонент ускорения получим:

$$a_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -R\omega^2, \qquad a_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = R\frac{d\omega}{dt}.$$

Таким образом, ускорение $\overrightarrow{a}$ движущегося по окружности тела складывается из двух компонент (рис. 4.14):

- центростремительной $\overrightarrow{a}_c$, направленной перпендикулярно скорости и равной по величине $\omega^2 R$;
- тангенциальной $\overrightarrow{a}_t$, направленной параллельно скорости и равной по величине $R\dfrac{d\omega}{dt}$.

Тот факт, что центростремительное ускорение равно $\omega^2 R$, можно записать в векторном виде.

Рассмотрим скалярное произведение $(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{r})$:

$$(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{r}) = (\overrightarrow{a}_c\cdot\overrightarrow{r}) + (\overrightarrow{a}_t\cdot\overrightarrow{r}) = -\omega^2 R\cdot R + 0 = -v^2.$$

Кинематическая связь для ускорения движущегося по окружности тела

$$(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{r}) + v^2 = 0 \qquad (4.14)$$

используется при решении задач.

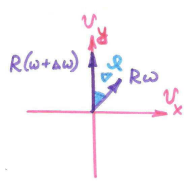


Рис. 4.13. ***

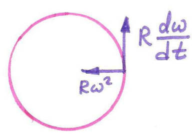


Рис. 4.14. ***

## §4.4. Кинематические связи

**4.4.1. Кинематическая связь для скоростей и ускорений двух тел, связанных жестким стержнем.** Выше мы получили соотношения (4.10) и (4.14) для скорости и ускорения тела, движущегося по окружности (соединенного с центром жестким стержнем длины $R$). Аналогичную кинематическую связь можно записать и для системы двух тел, соединенных жестким стержнем.

Пусть $(x_1; y_1; z_1)$ и $(x_2; y_2; z_2)$ — координаты точечных тел, являющиеся компонентами радиус-векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, $(x = x_2 - x_1; y = y_2 - y_1; z = z_2 - z_1)$ — компоненты вектора $\vec{r}$, соединяющего тело 1 и тело 2 (рис. 4.15).

Обозначим через $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ скорости тел, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ — их ускорения, $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ и $\vec{a} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$ — векторы относительных скорости и ускорения тел. Отметим, что вектор $\vec{v}$ имеет компоненты

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt},$$

а вектор $\vec{a}$ — компоненты

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt}.$$

Получим кинематическую связь — соотношение, связывающее $\vec{r}$ и $\vec{v}$.

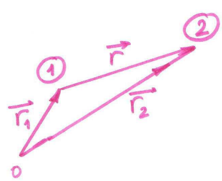


Рис. 4.15. ***

Учтем, что во все моменты времени длина стержня равна $L$. Запишем это условие для момента времени $t$:

$$x^2 + y^2 + z^2 = L^2. \tag{4.15}$$

В момент времени $t + \Delta t$ компоненты вектора $\overrightarrow{r}$ становятся равны $(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z)$; следовательно, соотношение (4.15) принимает вид:

$$(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 + (z + \Delta z)^2 = L^2. \tag{4.16}$$

Вычитая из соотношения (4.16) соотношение (4.15), получим:

$$2x\Delta x + (\Delta x)^2 2y\Delta y + (\Delta y)^2 2z\Delta z + (\Delta z)^2 = 0.$$

Пренебрегая квадратичными слагаемыми и разделив полученное соотношение на $2\Delta t$, получим:

$$xv_x + yv_y + zv_z = 0. \tag{4.17}$$

В векторном виде полученная кинематическая связь имеет вид:

$$(\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{v}) = 0.$$

Найдем теперь кинематическую связь для ускорения — соотношение, связывающее векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{v}$ и $\overrightarrow{r}$.

Запишем соотношение (4.17) в моменты времени $t$ и $t + \Delta t$:

$$xv_x + yv_y + zv_z = 0,$$

$$(x + \Delta x)(v_x + \Delta v_x) + (y + \Delta y)(v_y + \Delta v_y) + (z + \Delta z)(v_z + \Delta v_z) = 0.$$

Вычтем одно из соотношений из другого и пренебрежем слагаемыми, квадратичными по приращениям:

$$v_x\Delta x + x\Delta v_x + v_y\Delta y + y\Delta v_y + v_z\Delta z + z\Delta v_z = 0.$$

Разделив полученное соотношение на $\Delta t$, придем к искомой кинематической связи:

$$v_x^2 + xa_x + v_y^2 + ya_y + v_z^2 + za_z = 0.$$

Кинематическую связь для ускорения можно записать в векторном виде:

$$(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{r}) + v^2 = 0.$$

**4.4.2. Движение плоской фигуры, закрепленной в точке. Понятие о мгновенной оси вращения.** Рассмотрим плоскую фигуру, закрепленную в точке — оси вращения. При вращении вокруг оси все точки плоской фигуры движутся по концентрическим окружностям. Поскольку расстояния между точками фигуры сохраняются, за один и тот же промежуток времени все точки плоской фигуры поворачиваются на один и тот же угол. Следовательно, угловые скорости вращения всех точек плоской фигуры одинаковы.

Таким образом, векторы скорости движения точек плоской фигуры перпендикулярны соответствующим радиусам и пропорциональны расстоянию до оси вращения (рис. 4.16).

Данное утверждение справедливо и в том случае, если некоторая точка $O$ плоской фигуры имеет нулевую скорость только в *данный* момент времени. В этом случае точка $O$ называется *мгновенной* осью вращения.

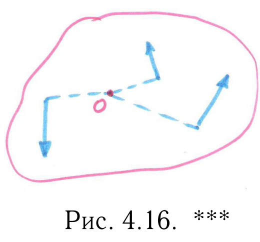


Рис. 4.16. ***