

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.3
К КУРСУ О.Ю.ШВЕДОВА
«ВВЕДЕНИЕ В ГЕОМЕТРИЮ»

задания повышенной трудности

Москва — Курск — Орел — Рязань, 2010 г.

ВАРИАНТ 1

Г1.1 (физфак, 1994) В треугольнике $BСD$ медианы BF и CE взаимно перпендикулярны, $CD = b$, $BD = c$. Найти BC .

Г1.2 (психологи, 1983) В $\triangle ABC$ проведена биссектриса $BD = 3\sqrt{2}/2$. Найти площадь треугольника, если $BC = 2$ и $DC = 1$.

Г1.3 (филфак, 2000) Прямая, параллельная стороне $AB = 5$ треугольника ABC и проходящая через центр вписанной в него окружности, пересекает стороны BC и AC в точках M и N соответственно. Найти периметр четырехугольника $ABMN$, если $MN = 3$.

Г1.4 (физфак, 1977) Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, в 4 раза меньше радиуса окружности, описанной около этого треугольника. Найти углы треугольника.

ВАРИАНТ 2

Г2.1 (физфак, 1996) В равнобедренном треугольнике BCD ($BC = CD$) проведена биссектриса BE . Известно, что $CE = c$, $DE = d$. Найти BE .

Г2.2 (филологи, 1985, переработка) На стороне AB треугольника ABC со стороной $BC = 52$ и высотой $BH = 20$ взята точка D так, что $AD = 20$ и $BD = 5$. Чему может быть равна площадь $\triangle BCD$?

Г2.3 (ФГП, 2006) В треугольнике ABC со сторонами $AB = 6$ и $BC = 4$ проведена биссектриса BL , точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности, $BO : OL = 3 : 1$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABL .

Г2.4 (филфак, 1986) Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC , пересекает стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Найти BC , если $AB = 8$, $\angle C = 60^\circ$, $DE = 3$ и $BC = DC$.

ВАРИАНТ 3

Г3.1 (физфак, 2003) В треугольнике $BСD$ даны стороны: $BC = d$, $CD = b$, $DB = c$. Биссектриса $СК$ пересекает биссектрису DL в точке M . Отрезки KL и BM пересекаются в точке N . Найти $LN:NK$.

Г3.2 (геологи, 1997) На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC с катетами $AB = 5$ и $BC = 4$ взята точка D , M — точка пересечения медиан $\triangle ABD$, N — точка пересечения медиан $\triangle BCD$. Найти площадь $\triangle BMN$.

Г3.3 (почвоведы, 2006) В треугольнике ABC известны стороны $AB = 9$, $BC = 8$, $AC = 7$; AD — биссектриса треугольника BAC . Окружность проходит через точку A , касается стороны BC в точке D и пересекает стороны AB и AC в точках E и F соответственно. Найти длину отрезка EF .

Г3.4 (геологи, 1999) Найти углы треугольника ABC , если его медиана BM равна половине стороны AC , а один из углов, образованных биссектрисой BL и стороной AC , равен 55° .

ВАРИАНТ 4

Г4.1 (физфак, 1994) В треугольнике ABC $AB=BC$, CN и BM — высоты треугольника, $BM = m$, $CN = n$. Найти AB и AC .

Г4.2 (психологи, 1999) На медианах AM , BN и CK треугольника ABC площадью 2 взяты точки P , Q и R соответственно так, что $AP : PM = 1 : 1$, $BQ : QN = 1 : 2$, $CR : RK = 5 : 4$. Найти площадь $\triangle PQR$.

Г4.3 (физфак, 1995) В окружности хорда BC параллельна диаметру AD . Через точку A проведена касательная к окружности, пересекающая прямые DB и DC соответственно в точках M и N . Известно, что $AM = m$, $AN = n$. Найти AD .

Г4.4 (экономисты, 1999) Найти площадь параллелограмма $ABCD$ с диагоналями $AC = \sqrt{2}a$, $BD = 3a$ и углом $\angle BAC = 60^\circ$.

ВАРИАНТ 5

Г5.1 (физфак, 1999) В ромбе $BCDE$ высоты CM и CN пересекают диагональ BD в точках P и Q (P между B и Q), $PQ = p$, $QD = q$. Найти MN .

Г5.2 (химфак, 1995) На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC взяты точки D и E соответственно так, что $CD = CE = 1$. Отрезки AE и $BD = \sqrt{10}$ пересекаются в точке O , а площадь треугольника ADO на $1/2$ больше площади $\triangle BEO$. Найти AB .

Г5.3 (физфак, 2000) Через точки K и L , лежащие на окружности, проведены касательные, пересекающиеся в точке M . Секущая MB пересекает эту окружность в точках A и B , а хорду KL — в точке N . Известно, что $MA : MB = 2 : 5$. Найти $MN : NB$.

Г5.4 (ВМК, 2003) Найти углы при основании AC равнобедренного треугольника ABC , если отношение расстояний от центра вписанной в него окружности до вершин A и B равно k . При каких k задача имеет решение?

ВАРИАНТ 6

Г6.1 (физфак, 1997) На стороне AB треугольника ABC взята точка F , а на продолжении стороны AC за точку C взята точка D , причем $FB=CD$. Отрезки FD и BC пересекаются в точке, которая делит отрезок FD в отношении $m : n$, считая от точки F . Найти отношение $AB:AC$.

Г6.2 (геологи, 1978) На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки D и E соответственно так, что $AD : BD = 1 : 2$ и $CE : BE = 2 : 1$. Отрезки AE и CD пересекаются в точке O . Найти площадь треугольника ABC , если площадь треугольника BCO равна 1.

Г6.3 (физфак, 2002) Окружность касается стороны BD $\triangle BCD$ в ее середине A , проходит через вершину C и пересекает стороны BC и CD в точках K и L соответственно, $BC : CD = 2 : 3$. Найти отношение площади $\triangle BKA$ к площади $\triangle ALD$.

Г6.4 (филфак, 2003) В равнобедренном треугольнике $\triangle ABC$ с основанием $AC = 1$ медианы AM и CN пересекаются в точке D под прямым углом. Найти $\angle A$ и площадь четырехугольника $AMDN$.

ВАРИАНТ 7

Г7.1 (почвоведы, 1993) Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям и пересекающая боковые стороны в точках E и F , причем $EF = 8$. Найти основания трапеции, если их отношение равно 4.

Г7.2 (географы, 1990) На сторонах AB , BC и AD параллелограмма $ABCD$ взяты точки K , L и M соответственно так, что $AK : KB = 2 : 1$, $BL : LC = 1 : 1$ и $AM : MD = 1 : 3$. Найти отношение площадей треугольников LBM и KBM .

Г7.3 (физфак, 2002) В трапеции $BCDE$ $CD \parallel BE$, $BC = DE$, площадь трапеции равна 96, а высота трапеции равна 6. Окружность, вписанная в трапецию, касается сторон BC и DE в точках M и N . Найти MN .

Г7.4 (филфак, 2002) Найти площадь треугольника ABC с углами 60° и 45° , если радиус окружности, проходящей через середины его сторон, равен 3.

ВАРИАНТ 8

Г8.1 (Прасолов, 2.69) Известно, что в некотором треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные из вершины C , делят угол на четыре равные части. Найдите углы этого треугольника.

Г8.2 (филологи, 1981) Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ со стороной $AB = 6$ пересекает сторону BC и диагональ BD в точках M и N соответственно так, что $MC = 4$. Найти площадь треугольника BMN , если высота параллелограмма, опущенная на основание AD , равна 3.

Г8.3 (физфак, 2003) Площадь треугольника равна $12\sqrt{5}$, периметр его равен 24, расстояние от одной из вершин до центра вписанной окружности равно $\sqrt{14}$. Найти наименьшую сторону треугольника.

Г8.4 (ВШБ, 2003) Внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием AC и углом $\angle B = 80^\circ$ взята такая точка M , что $\angle MAC = 30^\circ$, $\angle MCA = 10^\circ$. Найти $\angle BMC$.

ВАРИАНТ 9

Г9.1 (экономисты, 1987) На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно так, что $AM : BM = 2 : 3$ и $AN : CN = 4 : 5$. В каком отношении прямая CM делит отрезок BN ?

Г9.2 (геологи, 1996) В трапеции $ABCD$ боковая сторона $AD = 9$ перпендикулярна основаниям, диагонали пересекаются в точке O , $AO = 6$, $CD = 12$. Найти площадь треугольника CDO .

Г9.3 (физфак, 2004) Окружность с центром O вписана в $\triangle BCD$, $BC = 6$, $CD = 7$, $BD = 8$. Прямые BO , CO и DO пересекают стороны CD , BD и BC в точках L , M и N соответственно. Найти отношение площади $\triangle CNL$ к площади $\triangle BMN$.

Г9.4 (физфак, 1992) В треугольнике ABC высота AH равна h , $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$. Найти площадь треугольника ABC .

ВАРИАНТ 10

Г10.1 (химфак, 2001) На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята такая точка D , что $CD = 2$ и биссектриса CL треугольника перпендикулярна прямой DL . Найти AL .

Г10.2 (ИСАА, 1997) На сторонах AB и AD прямоугольника $ABCD$ площадью 36 взяты точки E и F соответственно так, что $AE : BE = 3 : 1$ и $AF : DF = 1 : 2$. Отрезки DE и CF пересекаются в точке O . Найти площадь треугольника FOD .

Г10.3 (физфак, 2005) Прямая OC пересекает окружность в точках B и C (B между O и C), прямая OE пересекает ту же окружность в точках D и E (D между O и E); $OB : OE = k$. Найти отношение площади четырехугольника $DBCE$ к площади $\triangle BOD$.

Г10.4 (экономисты, 1979) На боковой стороне $AB = 8$ равнобедренного треугольника ABC с основанием $AC = 12$ взята точка D так, что $AD : BD = 1 : 3$. Найти угол $\angle ACD$.