

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.1
К КУРСУ О.Ю.ШВЕДОВА
«ВВЕДЕНИЕ В ГЕОМЕТРИЮ»

задания для разбора с преподавателем

1. Подобие треугольников

Г1а.1 (Шарыгин-Гордин, 1181) В параллелограмме $ABCD$ сторона $AB = 4$. На стороне BC взята точка E так, что $BE : EC = 5 : 2$, и проведена прямая DE , пересекающая продолжение AB в точке F . Найдите BF .

Г1а.2 (Шарыгин-Гордин, 1209, переработка) В треугольник вписан ромб со стороной 6 так, что один угол у них общий, а противоположная вершина делит сторону треугольника в отношении $2:3$. Найдите стороны треугольника, содержащие стороны ромба.

Г1а.3 (Шарыгин-Гордин, 1218) В треугольнике ABC проведена прямая BD так, что $\angle ABD = \angle BCA$. Найдите отрезки AD и DC , если $AB = 2$ и $AC = 4$.

Г1а.4 (Прасолов, 1.16, упрощена) Основания AD и BC трапеции $ABCD$ равны a и b ($a > b$). Найдите длину отрезка MN , концы которого делят стороны AB и CD в отношении $AM : MB = DN : NC = 2 : 3$.

Г1а.5 (Шарыгин-Гордин, 1215) В равнобедренном треугольнике ABC стороны $AB = BC = a$, $AC = b$, AN и CM — биссектрисы треугольника. Найдите MN .

Г1а.6 (Шарыгин-Гордин, 1204) В треугольник с основанием a и высотой h вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании треугольника, а две другие — на боковых сторонах. Найдите сторону квадрата.

Г1а.7 (Шарыгин-Гордин, 1232а) Точки K и M лежат на сторонах AB и BC треугольника ABC , причем $AK : BK = 3 : 2$, $BM : MC = 3 : 1$. Прямая KM пересекает прямую AC в точке N . Найдите $CN : AC$.

Г1а.8 (почвоведы, 1996) На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ взяты точки E и F соответственно так, что $AE : BE = 2 : 1$ и $BF : CF = 3 : 1$. В каком отношении прямая DE делит отрезок AF ?

Г1а.9 (экономисты, 1985, упрощена) На стороне AC треугольника ABC взята такая точка D , что прямая BD делит медиану AM в отношении $1:2$, считая от вершины. Найдите $AD : DC$.

Г1а.10 (Прасолов, 1.36, упрощена) На сторонах BC и AC треугольника ABC взяты точки A_1 и B_1 . Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке D . Расстояния от точек A_1 , B_1 , C до прямой AB равны $4l$, $6l$ и $12l$ соответственно. Найдите расстояние от точки D до прямой AB .

2. Применения теоремы Пифагора

Г2а.1 (Шарыгин-Гордин, 846) В равнобедренной трапеции основания равны 10 и 24, боковая сторона 25. Найдите высоту трапеции.

Г2а.2 (Сканави, 11.163) Основания равнобедренной трапеции равны a и b , боковая сторона равна c . Найдите диагональ трапеции d .

Г2а.3 (Шарыгин-Гордин, 874, 883) Найдите высоту и радиусы вписанной, описанной и внеписанной окружностей равностороннего треугольника со стороной a .

Г2а.4 (Шарыгин-Гордин, 868) В равнобедренном треугольнике основание равно 30, а боковая сторона равна 39. Найдите радиус вписанного круга.

Г2а.5 (Шарыгин-Гордин, 869) Найдите радиус круга, описанного около равнобедренного треугольника с основанием 6 и боковой стороной 5.

Г2а.6 (Шарыгин-Гордин, 853) $AB = 18$ и $CD = 24$ — две параллельные хорды, расположенные по разные стороны от центра O окружности радиуса 15. Найдите расстояние между хордами.

Г2а.7 (Сканави, 11.166) Длины оснований равнобедренной трапеции относятся как 5:12, а длина ее высоты равна 17. Вычислите радиус окружности, описанной около трапеции, если ее средняя линия равна высоте.

Г2а.8 (Сканави, 11.010) В равнобедренном треугольнике с боковой стороной 4 медиана, проведенная к боковой стороне, равна 3. Найдите основание треугольника.

Г2а.9 (Сканави, 11.012) Найдите длины сторон равнобедренного треугольника ABC с основанием AC , если известно, что длины его высот AN и BM равны соответственно n и m .

Г2а.10 (Сканави, 11.060) В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки 5 и 12. Найдите катеты треугольника и радиус вписанной окружности.

Г2а.11 (Сканави, 11.076) Найдите отношение радиуса окружности, вписанной в прямоугольный равнобедренный треугольник, к высоте, опущенной на гипотенузу.

Г2а.12 (Шарыгин-Гордин, 1239) Точка на гипотенузе, равноудаленная от обоих катетов, делит гипотенузу на отрезки длиной 30 и 40. Найдите катеты треугольника.

Г2а.13 (Шарыгин-Гордин, 858) Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки a и b . Найдите катеты.

Г2а.14 (Шарыгин-Гордин, 1541) В треугольнике ABC дана точка D на стороне AB . Найдите CD , если известно, что $BC = 37$, $AC = 15$, $AB = 44$, $AD = 14$.

Г2а.15 (физфак, 1994, переработка) В прямоугольном треугольнике радиус описанной окружности равен 13, радиус вписанной окружности равен 4. Найдите стороны треугольника.

Г2а.16 (физфак, 1995) В прямоугольном треугольнике катет равен a , а биссектриса прямого угла равна l . Найдите другой катет.

Г2а.17 (филфак, 1990) В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB проведены медиана CM и высота CH , причем точка H лежит между A и M . Найдите $AH : AM$, если $CM : CH = 5 : 4$.

Г2а.18 (ИСАА, 2002) Найдите медиану AM треугольника ABC со сторонами $AB = 8$, $BC = 6$ и биссектрисой $BL = 6$.

Г2а.19 (психологи, 1995) В треугольнике ABC периметром 28 биссектрисы AD и BE пересекаются в точке M . Найдите AB , если $AB = BE$ и $BM = 2 \cdot ME$.

Г2а.20 (географы, 1992) Найдите стороны треугольника ABC , если его биссектриса $BL = 4$ и медиана $AM = 4$ перпендикулярны друг другу.

3. Площади

Г3а.1 (Шарыгин-Гордин, 1877) Боковая сторона треугольника разделена в отношении 2:3:4, считая от вершины, и из точек деления проведены прямые, параллельные основанию. В каком отношении разделилась площадь треугольника?

Г3а.2 (Сканави, 11.127) Высота ромба равна 12, а одна из диагоналей равна 15. Найдите площадь ромба.

Г3а.3 (Сканави, 11.147) Вычислите площадь трапеции, параллельные стороны которой равны 16 и 44, а непараллельные 17 и 25.

Г3а.4 (Сканави, 11.187) На сторонах равностороннего треугольника со стороной a вне его построены квадраты. Их вершины, лежащие вне треугольника, последовательно соединены. Определите площадь полученного шестиугольника.

Г3а.5 (биофак, 2000) На сторонах $AB = 6$ и $AC = 4$ треугольника ABC взяты точки D и E соответственно. Найдите площадь треугольника ADE , если $BC = 8$, $AD = 2$, $AE = 3$.

ГЗа.6 (филологи, 1999) Медианы AM и BN треугольника ABC пересекаются в точке K . Найдите площадь $\triangle ABC$, если площадь четырехугольника $CMKN$ равна 5.

ГЗа.7 (физфак, 2006) В $\triangle KLM$ дано: $LK : KM = 5 : 7$, расстояние от середины биссектрисы KN до стороны LK равно 2, площадь $\triangle KLM$ равна 48. Найдите LK .

ГЗа.8 (физфак, 1999) Около окружности описана равнобочная трапеция $BCDE$ ($CD \parallel BE$), площадь которой равна $2\sqrt{2}/3$, $CD : BE = 1 : 2$. Найдите BC .

ГЗа.9 (физфак, 1995) В трапеции $BCDE$ ($CD \parallel BE$) диагонали пересекаются в точке O , $CD = c$, $BE = b$. Найдите отношение площади треугольника COB к площади трапеции $BCDE$.

ГЗа.10 (физфак, 1996, упрощена) В трапеции $BCDE$ ($CD \parallel BE$) точка M — середина стороны BC . Площадь треугольника MDE равна S . Найдите площадь трапеции.

ГЗа.11 (психологи, 2001) Найдите площадь равнобедренной трапеции со средней линией m и перпендикулярными диагоналями.

ГЗа.12 (химфак, 1993) В квадрат площадью 18 вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата лежит по одной вершине прямоугольника. Найдите площадь прямоугольника, если его стороны относятся, как 1:2.

ГЗа.13 (ВМК, 1995) Медианы AM и CN треугольника ABC взаимно перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABM , если $BC = a$ и $AC = b$.

ГЗа.14 (Прасолов, 1.37) Из медиан треугольника ABC с площадью S составили другой треугольник. Найдите его площадь.

ГЗа.15 (Прасолов, 1.36, упрощена) Через точку Q , взятую на стороне AB треугольника ABC , проведены две прямые, параллельные сторонам AC и BC и разбивающие треугольник на три части, две из которых — треугольники с площадями S_1 и S_2 . Найдите площадь третьей части.

4. Углы и дуги

Г4а.1 (Шарыгин-Гордин, 1417) Касательная и секущая, проведенные из одной точки к одной окружности, взаимно перпендикулярны. Касательная равна 12, а внутренняя часть секущей равна 10. Найдите радиус окружности.

Г4а.2 (Шарыгин-Гордин, 1428) В квадрат $ABCD$ со стороной 2 вписана окружность, которая касается стороны CD в точке E . Найдите величину хорды, соединяющей точки, в которых окружность пересекается с прямой AE .

Г4а.3 (Шарыгин-Гордин, 1438, переработка) Хорды AB и CD пересекаются в точке P . Известно, что $AB = CD = 12$, $BD = 6$, $\angle APC = 60^\circ$. Найдите стороны треугольника BPD .

Г4а.4 (Сканави, 11.030) В окружности проведены две хорды $AB = a$ и $AC = b$. Длина дуги AC вдвое больше длины дуги AB . Найдите радиус окружности.

Г4а.5 (Сканави, 11.032) В сектор AOB радиусом R и углом 90° вписана окружность, касающаяся отрезков OA , OB и дуги AB . Найдите радиус окружности.

Г4а.6 (физфак, 1998, переработка) В трапеции $BCDE$, описанной около окружности, $CD \parallel BE$, $BC = DE$, $\angle BCD = 135^\circ$. Площадь трапеции равна $8\sqrt{2}$. Найдите BC .

Г4а.7 (филфак, 1988) Окружность, касающаяся сторон AD и CD параллелограмма $ABCD$, проходит через точку B и пересекает стороны $AB = 8$ и BC в точках E и F соответственно. Найдите AD , если $AE : BE = 4 : 5$ и $BF : CF = 8 : 1$.

Г4а.8 (физфак, 1998) Окружности радиусов 3 и 5 внешним образом касаются друг друга в точке A и каждая из них касается сторон угла. Их общая касательная, проходящая через точку A , пересекает стороны этого угла в точках B и C . Найдите BC .

Г4а.9 (физфак, 2006) В трапеции $KLMN$ ($LM \parallel KN$) $KL \neq MN$. Две прямые, параллельные основаниям LM и KN , делят трапецию на три части, в каждую из которых можно вписать окружность. Радиус средней из этих окружностей в два раза меньше радиуса наибольшей. Найдите отношение радиуса наименьшей из этих окружностей к радиусу наибольшей.

Г4а.10 (физфак, 2005) На окружности последовательно взяты точки K , L , M и N , $LM = MN$. Отрезки KM и LN пересекаются в точке A , $KL = l$, $KN = n$, $KA = a$. Найдите AM .

5. Применение тригонометрии

Г5а.1 (геологи, 2000) Найдите отношение высот треугольника ABC , опущенных из вершин A и B соответственно, если $\cos \angle A = 1/5$ и $\sin \angle B = 1/2$.

Г5а.2 (социофак, 2002) Найдите угол A треугольника ABC со сторонами $AB = 2$, $AC = 4$ и медианой $AM = \sqrt{7}$.

Г5а.3 (физфак, 1995) В остроугольном $\triangle LMN$ $LN = n$, $LM = m$, $\angle MLN = \alpha$. Найдите медиану LK и угол $\angle LMN$.

Г5а.4 (психологи, 1997, упрощена) В $\triangle ABC$ $\angle C = 60^\circ$, $BC = 2$, $AC = 5$. Найдите $\operatorname{tg} \angle A$.

Г5а.5 (физфак, 1995) В прямоугольном треугольнике острый угол равен α , а противолежащий ему катет равен a . Найдите биссектрису прямого угла.

Г5а.6 (психологи, 1997, упрощена) Биссектриса угла $\angle C = 60^\circ$ треугольника ABC равна $5\sqrt{3}$. Найдите BC , если $AC : BC = 5 : 2$.

Г5а.7 (физфак, 2000) В $\triangle BCD$ BE — биссектриса, $BE = l$, $BD = b$, $\angle CBD = \alpha$. Найдите BC .

Г5а.8 (физфак, 1992) В треугольнике ABC высота AH равна h , $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$. Найдите площадь треугольника ABC .

Г5а.9 (географы, 2003) В треугольнике ABC AL и AM — биссектриса и медиана соответственно. Найдите LM , если $\angle BAM = 45^\circ$, $\angle CAM = 30^\circ$, $BL = 6$.

Г5а.10 (биологи, 1980) Найдите стороны параллелограмма $ABCD$ с периметром 26, если $\angle B = 120^\circ$, а радиус вписанной в треугольник ABD окружности равен $\sqrt{3}$.