

**ПРИЛОЖЕНИЕ 5.3**  
**К КУРСАМ О.Ю.ШВЕДОВА**  
**«ВВЕДЕНИЕ В ГЕОМЕТРИЮ»**  
**И «ГЕОМЕТРИЯ В КООРДИНАТАХ»**

*задания повышенной трудности*

## ВАРИАНТ 1

Г1.1 (физфак, 2002) Хорда  $BC$  окружности радиуса 12 разделена точкой  $D$  на отрезки  $BD = 8$  и  $DC = 10$ . Найти минимальное из расстояний от точки  $D$  до точек окружности.

Г1.2 (физфак, 1987) Внутри прямоугольного треугольника  $CDE$  (угол  $D$  — прямой) взята точка  $F$  так, что площади треугольников  $CDF$  и  $DEF$  в четыре и пять раз соответственно меньше площади треугольника  $CDE$ . Длины отрезков  $FC$  и  $FD$  равны  $s$  и  $d$  соответственно. Найти длину отрезка  $FE$ .

Г1.3 (физфак, 1994) На окружности последовательно взяты точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Известно, что  $AC \perp BD$ ,  $BC = m$ ,  $AD = n$ . Найти радиус окружности.

Г1.4 (географы, 1994) Найти высоту, биссектрису и медиану, проведенные из вершины одного угла треугольника, если они делят этот угол на четыре равные части, а радиус описанной около треугольника окружности равен  $R$ .

Г1.5 (Сканави, 15.007) На прямой  $5x - 2y + 9 = 0$  найдите точку  $A$ , равноудаленную от точек  $B(-2; -3)$  и  $C(4; 1)$ , и вычислить площадь  $\triangle ABC$ .

Г1.6 (географы, 1998) В правильной пирамиде  $SABC$  проведены биссектриса  $AL$  боковой грани  $SAB$  и медиана  $BM$  основания  $ABC$ . Найти  $LM$ , если  $AB = 1$  и  $AS = 2$ .

## ВАРИАНТ 2

Г2.1 (физфак, 1997) В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 40, а радиус описанной окружности равен 25. Найти радиус вписанной окружности.

Г2.2 (экономисты, 1985) Диагонали четырехугольника  $ABCD$  площадью не более 4 пересекаются в точке  $E$ , а площади треугольников  $ABE$  и  $CDE$  равны по 1. Найти  $BC$ , если  $AD = 3$ .

Г2.3 (физфак, 2002) В треугольнике  $LMN$  отношение радиусов описанной и вписанной окружностей равно 6. Вписанная окружность касается сторон  $\triangle LMN$  в точках  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Найти отношение площади  $\triangle LMN$  к площади  $\triangle BCD$ .

Г2.4 (мехмат, 1990) Найти площадь треугольника  $ABC$  со сторонами  $AC = 6$ ,  $BC = 5$ , углом  $\angle A = 30^\circ$  и высотой  $BH < 1/\sqrt{2}$ .

Г2.5 (Сканави, 15.013) Известны координаты середин сторон треугольника  $M_1(-1; 2)$ ,  $M_2(2; -3)$ ,  $M_3(-3; -1)$ . Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника.

Г2.6 (физфак, 1977) Длина ребра куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  ( $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ ) равна 1. На ребре  $BC$  взята точка  $E$  так, что длина отрезка  $BE$  равна  $1/4$ . На ребре  $C_1 D_1$  взята точка  $F$  так, что длина отрезка  $FD_1$  равна  $2/5$ . Через центр куба и точки  $E$  и  $F$  проведена плоскость  $\alpha$ . Найти расстояние от вершины  $A_1$  до плоскости  $\alpha$ .

### ВАРИАНТ 3

Г3.1 (географы, 2000) На сторонах  $AB = 6$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $M$  и  $N$  соответственно так, что  $BM = BN$ . Перпендикуляры к прямым  $AB$  и  $BC$ , опущенные из точек  $N$  и  $M$  соответственно, пересекаются в точке  $K$ , а прямая  $BK$  пересекает сторону  $AC$  в точке  $L$ . Найти  $BL$ , если  $AL = 4$  и  $CL = 5$ .

Г3.2 (психологи, 1977) Найти площадь трапеции  $ABCD$  с боковой стороной  $AB = a$  и диагональю  $BD = b$ , если  $BC = CD = AD/2$ .

Г3.3 (физфак, 2001) Через вершину  $B$   $\triangle ABC$  проведена прямая, касательная к окружности, описанной около  $\triangle ABC$ . Расстояния от точек  $A$  и  $C$  до этой прямой равны  $a$  и  $c$ ,  $AC = b$ . Найти площадь  $\triangle ABC$ .

Г3.4 (физфак, 2006) В треугольнике  $ABC$  высота  $AH$  равна  $h$ ,  $\angle BAC = \alpha$ ,  $\angle BCA = \gamma$ . Найти площадь треугольника  $ABC$ .

Г3.5 (Шарыгин-Гордин, 2432) Даны точки  $A(2; 4)$ ,  $B(6; -4)$  и  $C(-8; -1)$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  прямоугольный.

Г3.6 (физфак, 2001) В правильной треугольной пирамиде  $SLMN$ , все ребра которой равны  $3a$ , на ребре  $SM$  взята точка  $A$  так, что  $SA : AM = 2 : 1$ . Через точку  $A$  проведена плоскость, параллельная ребру  $SL$  и высоте  $MK$  треугольника  $LMN$ . Найти периметр сечения пирамиды этой плоскостью.

### ВАРИАНТ 4

Г4.1 (физфак, 1998) В треугольнике  $BCD$   $DA$  — биссектриса,  $CD = b$ ,  $BD = c$  ( $b < c$ ). Через точку  $A$  проведена прямая, перпендикулярная  $DA$  и пересекающая сторону  $BD$  в точке  $M$ . Найти  $DM$ .

Г4.2 (биофак, 1987) Точка  $E$  на боковой стороне  $CD$  трапеции  $ABCD$  площадью 30 взята так, что  $2CD = 3ED$ , а  $F$  — середина стороны  $AB$ . Отрезки  $AE$  и  $DF$  пересекаются в точке  $O$ . Найти площадь треугольника  $AOE$ , если  $AD = 2BC$ .

Г4.3 (физфак, 2001) На стороне острого угла  $\angle LON$  взята точка  $M$  ( $M$  между  $O$  и  $L$ ). Окружность проходит через точки  $M$  и  $L$  и касается луча  $ON$  в точке  $N$ . На дуге  $MN$ , не содержащей точки  $L$ , взята точка  $K$ . Расстояние от точки  $K$  до прямых  $LN$ ,  $LM$  и  $MN$  равны соответственно  $l$ ,  $m$  и  $n$ . Найти расстояние от точки  $K$  до прямой  $ON$ .

Г4.4 (физфак, 1990) В равнобедренной трапеции диагональ образует угол  $\beta$  с основанием, а площадь трапеции равна  $S$ . Найти диагональ трапеции.

Г4.5 (Сканави, 15.027) Докажите, что треугольник с вершинами  $A(2; 1)$ ,  $B(3; 0)$  и  $C(1; 5)$  тупоугольный, и найдите косинус тупого угла.

Г4.6 (геологи, 1999) Все ребра правильной пирамиды  $SABCD$  с вершиной  $S$  равны по 2. Плоскость, параллельная прямым  $AC$  и  $SB$ , пересекает ребра  $AB$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $N$ . Найти периметр сечения пирамиды этой плоскостью, если  $MN = \sqrt{2}$ .

## ВАРИАНТ 5

Г5.1 (физфак, 2003) В трапеции  $PQRS$  ( $QR \parallel PS$ )  $RT$  — биссектриса  $\angle QRS$ , точка  $T$  — середина отрезка  $PQ$ , средняя линия равна  $2\sqrt{5}$ ,  $ST = 4$ . Найти  $RT$ .

Г5.2 (филфак, 2001) На сторонах  $AB$  и  $CD$  трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD = 2BC$  выбраны соответственно точки  $M$  и  $N$  так, что  $AM : MB = 3 : 5$  и  $CN : ND = 3 : 4$ . Найти отношение площадей четырехугольников  $AMND$  и  $BMNC$ .

Г5.3 (физфак, 2000) В  $\triangle BCD$   $BC = b$ ,  $CD = c$ , точка  $O$  — центр описанной окружности. Прямая  $DA$ , перпендикулярная прямой  $CO$ , пересекает сторону  $BC$  в точке  $A$ . Найти  $AB$ .

Г5.4 (физфак, 1988) В прямоугольном треугольнике острый угол равен  $\alpha$ , а радиус окружности, проходящей через середины катетов и вершину прямого угла, равен  $R$ . Найти площадь треугольника.

Г5.5 (Сканави, 15.022) Составьте уравнения касательных, проведенных к окружности  $x^2 + y^2 = 9$  из точки  $M(5; 0)$ .

Г5.6 (физфак, 2004) В правильной треугольной пирамиде  $SKLM$  с вершиной  $S$  проведена медиана  $MP$  в  $\triangle SLM$  и даны  $KL = 1$ ,  $SK = 3$ . Через середину  $N$  ребра  $SM$  проведена прямая  $NE$ , параллельная ребру  $KL$ . Через точку  $K$  проведена прямая, пересекающая прямые  $MP$  и  $NE$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно. Найти длину отрезка  $AB$ .

## ВАРИАНТ 6

Г6.1 (физфак, 1993) В равнобедренном треугольнике  $BCD$  ( $BC = CD$ ) проведена биссектриса  $BE$ . Известно, что  $CE : ED = m$ . Найти отношение длины отрезка  $ED$  к радиусу окружности, описанной около треугольника  $BED$ .

Г6.2 (химфак, 1986) На стороне  $AB = 5$  и основании  $AC = 6$  равнобедренного треугольника  $ABC$  взяты точки  $D$  и  $E$  соответственно так, что  $AE = BD = 2$ . Прямые  $BE$  и  $CD$  пересекаются в точке  $O$ . Найти площадь треугольника  $BOC$ .

Г6.3 (физфак, 1995) В треугольнике даны два угла  $\alpha$  и  $\beta$  и радиус  $R$  описанной окружности. Найти высоту, опущенную из вершины угла  $\alpha$ .

Г6.4 (физфак, 2005) В окружности проведены диаметр  $BD$  и хорды  $BC$  и  $BE$  (точки  $C$  и  $E$  по разные стороны от диаметра  $BD$ ). В четырехугольнике  $BCDE$  можно вписать окружность радиуса  $r$ ,  $\angle CBE = \alpha$ . Найти  $BD$ .

Г6.5 (Шарыгин-Гордин, 2431) Даны точки  $A(3; 5)$ ,  $B(-6; -2)$  и  $C(0; -6)$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  равнобедренный.

Г6.6 (физфак, 2000) В треугольной пирамиде  $SBCD$   $SD \perp BC$ ,  $SD \perp BD$ ,  $BC = CD = 4$ ,  $BD = 3$ ,  $SD = 4$ . Найти радиус сферы, описанной около пирамиды.

## ВАРИАНТ 7

Г7.1 (мехмат, 1983) На стороне  $CD$  трапеции  $ABCD$  с основанием  $AD = 4$  и  $BC = 3$  взята такая точка  $E$ , что отрезок  $AE$  делит среднюю линию трапеции в отношении 2:5. Найти отношение высоты  $EH$  треугольника  $AED$  к высоте трапеции.

Г7.2 (биофак, 1999) На основаниях  $AD$  и  $BC$  трапеции  $ABCD$  во внешнюю сторону построены квадраты  $ADEF$  и  $BCGH$ . Найти  $AD$ , если  $BC = 2$ ,  $FG = 18$  и  $GO = 7$ , где  $O$  — точка пересечения диагоналей трапеции.

Г7.3 (физфак, 1992) Через середины сторон  $BD$  и  $CD$  треугольника  $BCD$  проведены прямые, перпендикулярные этим сторонам. Эти прямые пересекают высоту  $DH$  треугольника или ее продолжение в точках  $K$  и  $M$ . Известно, что  $DK = k$ ,  $DM = m$ . Найти радиус окружности, описанной около треугольника  $BCD$ .

Г7.4 (физфак, 1998) В  $\triangle BCD$   $\angle CBD = \alpha$ ,  $BC = b$ . Вписанная окружность касается сторон  $BD$  и  $CD$  в точках  $K$  и  $L$ , биссектриса угла  $CBD$  пересекает прямую  $KL$  в точке  $M$ . Найти расстояние от точки  $M$  до прямой  $BC$ .

Г7.5 (Сканави, 15.002) Даны точки  $A(2; 1)$ ,  $B(3; -1)$ ,  $C(-4; 0)$ , являющиеся вершинами равнобедренной трапеции  $ABDC$ . Найдите координаты точки  $D$ , если  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ .

Г7.6 (физфак, 2003) Сфера касается плоскости основания  $BCD$  правильной треугольной пирамиды  $SBCD$  в точке  $D$ , а также касается бокового ребра  $SC$  в точке  $M$ ,  $SM : MC = 1 : 2$ ,  $BC = a$ . Найти радиус сферы.

## ВАРИАНТ 8

Г8.1 (психологи, 2001) Найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4.

Г8.2 (геологи, 2002) На продолжении основания  $AC = 3$  равнобедренного треугольника  $ABC$  с биссектрисой  $CD$  взята такая точка  $E$ , что  $CE = 4$  и  $\angle CDE = 90^\circ$ . Найти площадь треугольника  $ABC$ .

Г8.3 (физфак, 1997) В трапеции  $BCDE$   $CD \parallel BE$ ,  $\angle BCD$  прямой. Прямая, перпендикулярная стороне  $DE$ , пересекает сторону  $BC$  в точке  $M$ , а сторону  $DE$  — в точке  $N$ . Известно, что  $MD = a$ , а расстояния от точек  $B$  и  $E$  до прямых  $CN$  и  $MD$  равны соответственно  $b$  и  $c$ . Найти  $CN$ .

Г8.4 (физфак, 1997) На сторонах острого угла с вершиной  $N$  взяты точки  $L$  и  $M$ . На продолжении луча  $NL$  за точку  $N$  взята точка  $P$  на расстоянии  $7 \cdot MN$  от прямой  $MN$ , а на продолжении луча  $NM$  за точку  $N$  — точка  $Q$  на расстоянии  $7 \cdot LN$  от прямой  $LN$ . Радиус окружности, описанной около треугольника  $LMN$ , равен 1. Найти  $PQ$ .

Г8.5 (Сканави, 15.025) При повороте вокруг начала координат точка  $A(6; 8)$  переходит в точку  $A_1(8; 6)$ . Найдите косинус угла поворота.

Г8.6 (почвоведы, 2002) Найти радиус сферы, касающейся всех ребер пирамиды с высотой  $H$  и правильным треугольником со стороной  $a$  в основании.

## ВАРИАНТ 9

Г9.1 (экономисты, 2002) Помещается ли треугольник со сторонами 2, 3 и 2 в круге диаметром  $\sqrt{10}$ ?

Г9.2 (географы, 2002) На отрезке, соединяющем середины  $M$  и  $N$  сторон  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, взята точка  $K$  так, что  $KM : AM = 1 : 2$  и  $KN = BM$ . Найти отношение площадей треугольников  $ABK$  и  $ACK$ .

Г9.3 (физфак, 1996) В окружности радиуса  $R$  проведены диаметр  $BC$  и хорда  $BD$ . Хорда  $PQ$ , перпендикулярная диаметру  $BC$ , пересекает хорду  $BD$  в точке  $M$ . Известно, что  $BD = a$ ,  $PM : MQ = 1 : 3$ . Найти  $BM$ .

Г9.4 (физфак, 1995) Около трапеции  $BCDE$  ( $CD \parallel BE$ ) описана окружность. Известно, что  $CD = c$ ,  $BE = b$ ,  $\angle DBE = \alpha$ . Найти радиус окружности.

Г9.5 (Сканави, 15.023) Составьте уравнение окружности, описанной около треугольника, образованного прямой  $3x - y + 6 = 0$  и осями координат.

Г9.6 (физфак, 1998) В правильной четырехугольной пирамиде  $SKLMN$  площадь сечения, проходящего через боковое ребро  $SM$  и высоту  $SH$  пирамиды, в три раза меньше площади основания пирамиды. Боковое ребро равно  $\sqrt{26}$ . Найти площадь боковой грани пирамиды.

## ВАРИАНТ 10

Г10.1 (почвоведы, 2004) Вокруг квадрата со стороной 3 описана окружность. На окружности отмечена точка, расстояние от которой до одной из вершин квадрата равно 2. Найти расстояние от этой точки до трех других вершин квадрата.

Г10.2 (психологи, 2000) На основании  $BC = 3$  трапеции  $ABCD$  с высотой 5 взята точка  $E$ ,  $F$  — середина стороны  $CD$ , а  $G$  — точка пересечения отрезков  $AE$  и  $BF$ . Найти площадь четырехугольника  $AGFD$ , если  $AD = 5$ ,  $BE = 2$ .

Г10.3 (физфак, 1989) Через точки  $C$  и  $D$  проходят две окружности радиусов  $R$  и  $r$ . Прямая  $CD$  пересекает их общую касательную в точке  $M$  ( $K$  и  $L$  — точки касания,  $D$  — между  $M$  и  $C$ ). Найти: (а) радиус окружности, проходящей через точки  $K$ ,  $D$  и  $L$ ; (б) отношение расстояний от точки  $M$  до прямых  $KD$  и  $DL$ .

Г10.4 (физфак, 1996) В остроугольном треугольнике  $BCD$  проведена высота  $CE$  и из точки  $E$  опущены перпендикуляры  $EM$  и  $EN$  на стороны  $BC$  и  $CD$ . Известно, что  $CE = b$ ,  $MN = a$ . Найти угол  $\angle BCD$ .

Г10.5 (Шарыгин-Гордин, 2473) Составьте уравнение окружности, проходящей через точки  $A(-1; 1)$ ,  $B(9; 3)$ ,  $C(1; 7)$ .

Г10.6 (геологи, 2003) Основанием пирамиды  $SABC$  служит правильный треугольник  $ABC$  со стороной  $\sqrt{3}$ , а боковое ребро  $SA = \sqrt{3}/3$  перпендикулярно плоскости основания. Найти расстояние между прямыми  $AB$  и  $SC$ .