



### 1. Неупругие удары (7 баллов)

В теории удара столкновение тел характеризуется *коэффициентом восстановления*  $e$ . Он равен отношению модулей проекций относительной скорости точек контакта на общую нормаль после и до удара. В данной задаче считается, что  $e$  зависит только от материала тел.

Маленькая гладкая шайба массой  $m$ , движущаяся со скоростью  $v$ , сталкивается с гантелью из двух одинаковых гладких шайб, каждая из которых имеет массу  $nm$ . Шайбы соединены жёстким невесомым стержнем. При ударе перпендикулярно стержню (рис. 1) налетающая шайба после столкновения останавливается. При ударе вдоль оси стержня в одну из шайб (рис. 2) налетающая шайба отскакивает в противоположную сторону со скоростью  $v/5$ .

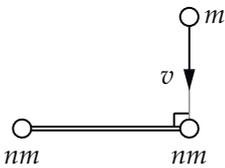


Рис. 1

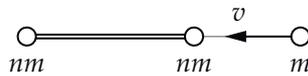


Рис. 2

- Найдите отношение массы шайбы гантели к массе налетающей шайбы  $n$  и коэффициент восстановления  $e$ .

### 2. Колебания поршня (12 баллов)

В вертикальном цилиндре под поршнем массой  $m$ , способным двигаться вдоль его оси без трения, находится  $\nu$  молей идеального газа. Давление и температура окружающего воздуха равны  $P_0$  и  $T_0$ , площадь сечения цилиндра —  $S$ . Удельная теплоёмкость газа при постоянном объёме равна  $c_V$ . Теплоёмкостью цилиндра и поршня можно пренебречь. Первоначально система находится в равновесии, температура газа равна  $T_0$ .

- Считая процессы в газе квазистатическими, определите циклическую частоту малых свободных колебаний поршня в двух случаях: при поддержании постоянной температуры газа ( $\Omega_T$ ) и в условиях полной теплоизоляции цилиндра ( $\Omega_S$ ).
- Пусть теперь цилиндр не изолирован. Мощность теплопередачи вследствие теплообмена между газом под поршнем и окружающим воздухом задаётся выражением:

$$N = \beta(T - T_0),$$

где  $T$  — температура газа,  $\beta$  — известный коэффициент. Под действием периодической внешней силы поршень совершает малые вынужденные колебания по закону:

$$y(t) = h \sin(\Omega t),$$

где  $y$  — отклонение поршня от положения равновесия, ось  $OY$  направлена вверх. Через некоторое время после начала действия силы устанавливаются малые гармонические колебания разности температур  $\Delta T = T - T_0$ . Определите амплитуду этих колебаний и разность фаз между колебаниями разности температур и вертикальной координаты поршня.

### 3. Построение (9 баллов)

Тонкая собирающая *идеальная* линза и плоское зеркало (см. рис. 3) расположены параллельно на расстоянии, равном фокусному расстоянию линзы  $f$ . *Идеальной* называется тонкая линза, в которой любые лучи, в том числе идущие под большими углами к оптической оси, преломляются как параксиальные (приосевые).

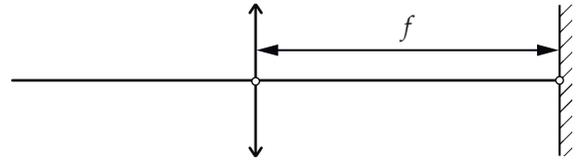


Рис. 3

- Светящаяся точка находится на расстоянии  $a$  от линзы ( $f \leq a \leq 2f$ ) со стороны, противоположной зеркалу. На каком расстоянии от линзы расположено её изображение в этой системе?
- На рис. 4 показано изображение предмета в виде окружности (плоскость окружности перпендикулярна плоскости зеркала), полученное в этой оптической системе. Известно, что изображение совпадает с предметом; точки  $L$  и  $M$ , отмеченные на рис. 4, принадлежат линзе и зеркалу соответственно.

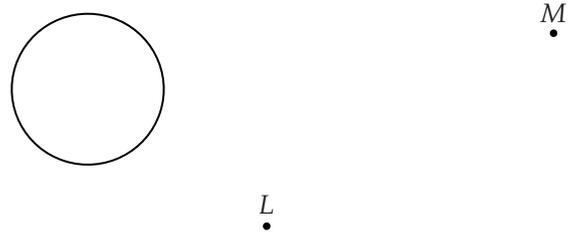


Рис. 4

С помощью циркуля и линейки на дополнительном листе с увеличенным рис. 4 постройте оптический центр и фокусы линзы. Приведите обоснование вашего построения (описывать алгоритм стандартных геометрических построений не требуется). Дополнительный лист с выполненным построением **следует сдать** вместе с работой.

### 4. Polyswitch (12 баллов)

Плавкий предохранитель — это одноразовый защитный элемент. Его современной многократной альтернативой является *самовосстанавливающийся предохранитель* (известный также под названием *Polyswitch*).

В основе устройства лежит полимерный материал с проводящими вкраплениями. При достижении критической температуры  $T_{пл}$  в материале происходит фазовый переход: проводящие пути разрушаются, и электрическое сопротивление устройства резко возрастает. При остывании материала ниже  $T_{пл}$  структура проводящих путей восстанавливается, и сопротивление возвращается к исходному низкому значению.

Продолжение задания см. на листе 2

Поведение некоторого самовосстанавливающегося предохранителя предлагается описывать с помощью следующей упрощённой модели. При температуре ниже критической температуры  $T_{пл} = 120^\circ\text{C}$  его сопротивление постоянно и равно  $R_1 = 1\text{ Ом}$ . При  $T_{пл}$  оно скачкообразно увеличивается до  $R_2 = 10\text{ кОм}$  и при дальнейшем нагреве не меняется. В самой точке фазового перехода (при  $T = T_{пл}$ ) сопротивление может принимать любые промежуточные значения в диапазоне от 1 Ом до 10 кОм.

Считайте, что мощность теплоотдачи от предохранителя в окружающую среду описывается соотношением

$$P = \alpha(T - T_0),$$

где  $\alpha = 10\text{ мВт}/^\circ\text{C}$  — коэффициент теплоотдачи,  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  — температура окружающей среды,  $T$  — температура предохранителя.

- Изобразите статическую вольт-амперную характеристику (ВАХ) предохранителя, считая, что в любой точке ВАХ он находится в установившемся тепловом режиме.
- Пусть предохранитель подключён к идеальному источнику с ЭДС  $\mathcal{E} = 10\text{ В}$  последовательно с реостатом, сопротивление которого может меняться от 0 до 50 Ом, и катушкой индуктивности  $L$ . Считайте, что индуктивность катушки достаточно велика, так что тепловой баланс в предохранителе устанавливается гораздо быстрее, чем меняется ток. Это позволяет описывать состояние предохранителя его статической ВАХ в любой момент времени. Сколько рабочих точек теоретически может реализоваться в цепи при различных значениях сопротивления реостата? Какие из этих точек являются устойчивыми относительно флуктуаций тока в цепи? Рабочая точка считается *устойчивой* по току, если при малом отклонении тока от значения в рабочей точке возникающая в катушке ЭДС самоиндукции стремится вернуть цепь в исходное состояние.
- Теперь рассмотрим реальную цепь. Предохранитель подключили через ключ последовательно с резистором  $R$  к двум соединённым последовательно батарейкам 3R12 (ЭДС каждой  $\mathcal{E} = 4,5\text{ В}$ , внутреннее сопротивление  $r = 1\text{ Ом}$ ). Какой ток установится в цепи после замыкания ключа, если  $R = 7\text{ Ом}$ ? Опишите качественно процессы, происходящие в цепи после замыкания ключа, если сопротивление резистора равно  $R = 2\text{ Ом}$ . Учтите, что в этом случае ток может изменяться настолько быстро, что температура предохранителя не будет успевать подстраиваться под текущее значение мощности.

### 5. Падающий в трубе магнит (10 баллов)

При решении этой задачи могут оказаться полезными (а могут и не оказаться) некоторые или все из приведённых ниже формул.

Уравнения для осесимметричного магнитного поля в вакууме в цилиндрической системе координат:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = 0$$

Связь радиальной компоненты  $B_r$  осесимметричного поля с магнитным потоком  $\Phi(z)$  через диск радиуса  $R$ ,

центр которого лежит на оси  $OZ$  в точке с координатой  $z$ , а плоскость перпендикулярна этой оси:

$$B_r(R, z) = -\frac{1}{2\pi R} \cdot \frac{d\Phi}{dz}.$$

Осевая и радиальная составляющие поля магнитного диполя с моментом  $m$  (момент направлен вдоль оси  $OZ$ ):

$$B_z(z, r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{m(2z^2 - r^2)}{(z^2 + r^2)^{5/2}}, \quad B_r(z, r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3mzr}{(z^2 + r^2)^{5/2}}.$$

Поле в центре основания постоянного магнита цилиндрической формы (радиус основания  $a$ , высота  $h$ , магнитный момент  $m$ ):

$$B_0 = \frac{\mu_0 m}{2\pi a^2 \sqrt{a^2 + h^2}}.$$

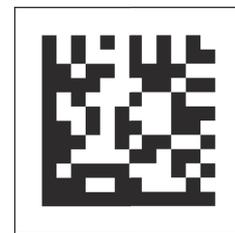
Значения некоторых несобственных интегралов:

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^4} = \frac{\pi}{32a^5}, \quad \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^5} = \frac{5\pi}{256a^7}$$

- Рассмотрим тонкое кольцо радиуса  $R$ , изготовленное из проволоки сечением  $S$  ( $S \ll R^2$ ). Проводимость материала кольца (величина, обратная удельному сопротивлению)  $\sigma = \frac{1}{\rho}$  известна. Кольцо движется с постоянной скоростью  $v$  вдоль оси  $OZ$ , которая совпадает с осью симметрии магнитного поля и самого кольца. Считая известными функции  $B_z(z, r)$  и  $B_r(z, r)$ , задающие осевую и радиальную компоненты магнитной индукции, найдите силу, действующую на кольцо в точке с координатой  $z$ .
- В начале координат закреплён небольшой магнит с моментом  $m$ , направленным вдоль оси  $OZ$ . Вдоль этой же оси движется очень длинная тонкостенная труба радиуса  $R$  с толщиной стенки  $d$  ( $d \ll R$ ). Ось трубы совпадает с осью  $OZ$ , а её скорость  $v$  постоянна. Материал трубы имеет проводимость  $\sigma$ . Определите силу взаимодействия трубы и магнита.
- В вертикальной медной трубе ( $R = 1\text{ см}$ ,  $d = 1\text{ мм}$ ) падает соосный трубе цилиндрический неодимовый магнит (радиус основания  $a = 0,5\text{ см}$ , высота  $h = 2a$ ). Спустя некоторое время после начала падения скорость магнита становится постоянной. Определите эту установившуюся скорость, считая что поле вне магнита совпадает с полем точечного диполя, расположенного в его центре и обладающего тем же магнитным моментом. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Плотность материала магнита  $\rho_m = 7,4\text{ г}/\text{см}^3$ , проводимость меди  $\sigma = 5,8 \cdot 10^7\text{ (Ом} \cdot \text{м)}^{-1}$ . Магнит создаёт поле  $B_0 = 1\text{ Тл}$  в центре своего основания. Ускорение свободного падения  $g = 10\text{ м}/\text{с}^2$ .

скрепить  
здесь

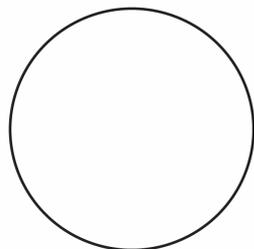
# Московская олимпиада школьников



\_\_\_\_\_ ЛИСТ \_\_\_\_\_ ИЗ \_\_\_\_\_  
класс номер участника

Дополнительный лист к задаче 3, 11 класс

Московская олимпиада школьников



$M$   
◦

$L$   
◦

Не забудьте вписать ваш номер участника в соответствующее поле в  
верхней части листа!