

**1. Разворот системы (10 баллов)**

Две пристани расположены на противоположных берегах реки шириной 100 м напротив друг друга в точках A и B . Скорость течения реки равна 1 м/с. На том же берегу, где находится пристань B , ниже по течению расположена пристань C . От пристани A отплывает вёсельная лодка, которая держит курс под углом α ($\sin \alpha = 3/5$) к направлению скорости течения реки. Скорость лодки относительно воды всё время остаётся постоянной по модулю и направлению. Одновременно с лодкой от пристани B в сторону пристани C выезжает велосипедист и движется с постоянной скоростью. Доехав до пристани C , он быстро разворачивается на 180° и с прежней скоростью едет обратно в направлении пристани B .

На рис. 1 показана (в неизвестном масштабе) траектория $KLMN$ лодки в системе отсчёта велосипедиста от момента старта (точка K) до момента причаливания к противоположному берегу (точка N). Оси используемой системы координат жёстко связаны с рамой велосипеда (на рисунке не показаны). Разворот велосипедиста на 180° считается мгновенным.

- Определите скорость велосипедиста, скорость лодки относительно воды и расстояние между пристанями B и C .

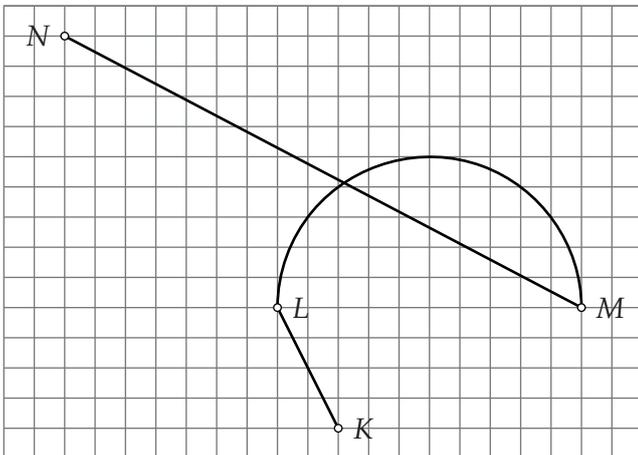


Рис. 1

2. Трение и нейросеть (10 баллов)

На шероховатой наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α ($\operatorname{tg} \alpha = 1/2$) удерживается массивная треугольная призма массой $m = 1$ кг, имеющая в сечении прямоугольный треугольник с острым углом α . Призма лежит на плоскости на боковой грани так, что другая её боковая грань (обращённая вверх) горизонтальна. На этой грани лежит лист бумаги, а на листе бумаги — брусок массой m . Брусок

при помощи нитки (невесомой и нерастяжимой) соединён с очень лёгким кольцом, надетым на гладкий вертикальный закреплённый стержень (см. рис. 2). Нить не натянута, но и не провисает, так что движение бруска по горизонтали (в случае освобождения системы) в течение некоторого времени исключено.

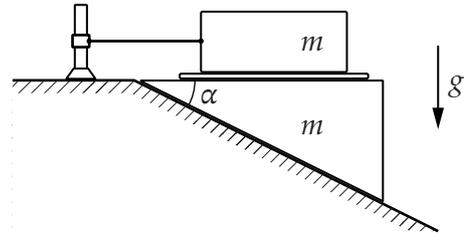


Рис. 2

Коэффициенты трения призмы о бумагу и бруска о бумагу одинаковы и равны μ_1 . Коэффициент трения призмы о наклонную плоскость равен μ_2 . Предполагается, что $0 \leq \mu_1 \leq 1$ и $0 \leq \mu_2 \leq 1$. Система освобождается.

- При каких μ_1 и μ_2 клин начнёт двигаться? Изобразите на плоскости (μ_1, μ_2) область, соответствующую найденным значениям.
- Ниже приведено решение первого пункта задачи, предложенное известной нейросетью. Верно ли оно? Если да, его можно использовать; если нет, укажите допущенные ошибки.

Брусок удерживается нитью и не имеет горизонтального ускорения. Следовательно, сила трения между бруском и бумагой уравнивает горизонтальную реакцию со стороны призмы. Максимальная сила трения между бруском и бумагой равна

$$F_{1,\max} = \mu_1 mg.$$

Эта же по модулю сила действует на призму со стороны бумаги (в противоположную сторону) и направлена горизонтально. На призму действуют: её вес mg , вес бруска mg , нормальная реакция плоскости N_2 и сила трения о плоскость F_2 .

Полная нормальная реакция наклонной плоскости

$$N_2 = 2mg \cos \alpha.$$

Максимальная сила трения призмы о плоскость

$$F_{2,\max} = 2\mu_2 mg \cos \alpha.$$

Составляющая сил, стремящаяся сдвинуть призму вниз по наклонной плоскости: $2mg \sin \alpha$. Горизонтальная сила трения со стороны бумаги даёт проекцию на наклонную плоскость: $F_{1,\parallel} = F_1 \cos \alpha$. В предельном случае $F_1 = \mu_1 mg$, поэтому

$$F_{1,\parallel} = \mu_1 mg \cos \alpha.$$

Продолжение задания см. на листе 2

Условие начала скольжения призмы:

$$2mg \sin \alpha - \mu_1 mg \cos \alpha > 2\mu_2 mg \cos \alpha.$$

Сокращая на $mg \cos \alpha$, получаем

$$2 \operatorname{tg} \alpha - \mu_1 > 2\mu_2.$$

При $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ окончательно

$$1 - \mu_1 > 2\mu_2, \quad \mu_2 < \frac{1 - \mu_1}{2}.$$

Таким образом, призма начнёт выскальзывать при

$$\mu_2 < \frac{1 - \mu_1}{2}, \quad 0 \leq \mu_1 \leq 1, \quad 0 \leq \mu_2 \leq 1.$$

На плоскости (μ_1, μ_2) это область ниже прямой

$$\mu_2 = \frac{1 - \mu_1}{2}.$$

3. Эффект Магнуса (10 баллов)

В спортивных играх с мячом широко применяются кручёные удары, при которых мячу сообщается не только поступательная скорость, но и вращение. В результате мяч движется по сложной траектории и при определённых условиях отклоняется в сторону от вертикальной плоскости, содержащей вектор начальной скорости.

Такая траектория мяча объясняется *эффектом Магнуса*. Взаимодействие вращающегося мяча с воздухом количественно характеризуется двумя силами: силой сопротивления F_D (направленной противоположно скорости центра мяча) и силой Магнуса F_M , направленной перпендикулярно скорости (см. рис. 3) и также перпендикулярно оси вращения. В этой задаче считается, что ось вращения перпендикулярна направлению скорости центра мяча.

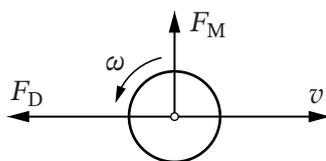


Рис. 3

В первом приближении можно считать, что эти силы задаются формулами:

$$F_D = C_D v^2, \quad F_M = C_M \omega v,$$

где C_D и C_M — постоянные коэффициенты, v — скорость центра мяча, ω — угловая скорость его вращения (предполагается, что в процессе полёта она не изменяется).

Анализ движения вращающегося тела в поле тяжести при наличии аэродинамических сил достаточно сложен. Поэтому далее мы пренебрежём силой тяжести и ограничимся рассмотрением плоского движения мяча под действием только двух сил: лобового сопротивления F_D и силы Магнуса F_M .

- Пусть $C_D = 0$, то есть сила сопротивления отсутствует. Известны величины C_M , ω и m . Мяч вылетает из точки A со скоростью v_0 под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонтальной прямой. Найдите расстояние AB , где B — точка повторного пересечения траектории с этой прямой.
- В этом пункте $C_D \neq 0$. Мяч массой $m = 3$ г вылетает со скоростью $v_0 = 15$ м/с под углом $\alpha = 30^\circ$ к вертикали. Угловая скорость вращения $\omega = 100$ рад/с. Траектория движения мяча за промежуток времени $t_0 = 0,5$ с показана на рис. 4. Этот график получен методом численного моделирования; копия графика представлена на листе 4, см. рис. 7.

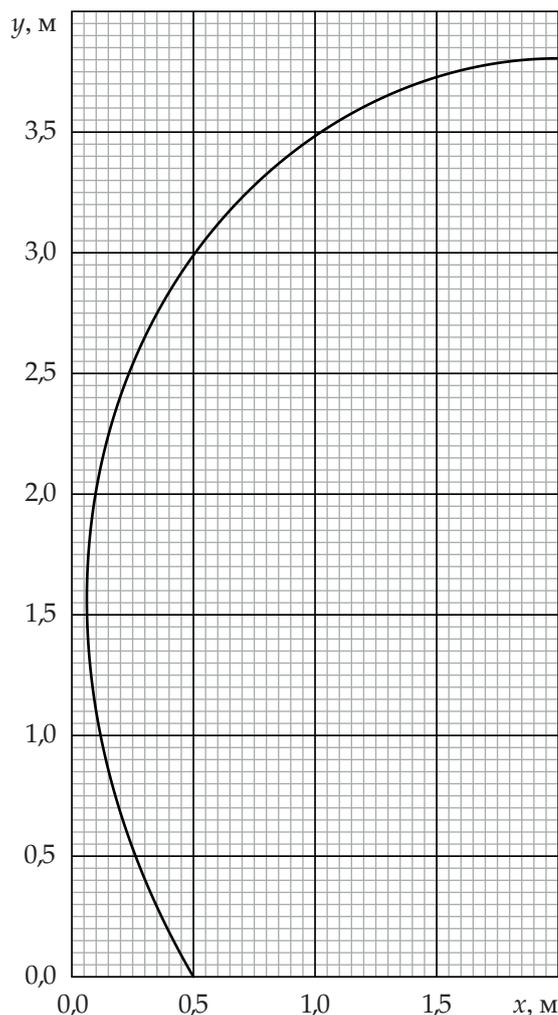


Рис. 4

Зависимость модуля скорости мяча от времени $v(t)$ за тот же промежуток приведена на рис. 5 (см. следующий лист). Используя графики, определите коэффициенты C_D и C_M с максимально возможной точностью.

Примечание. Масса 3 г и указанные кинематические параметры типичны для мяча в настольном теннисе при кручёных ударах средней силы.

Продолжение задания см. на листе 3

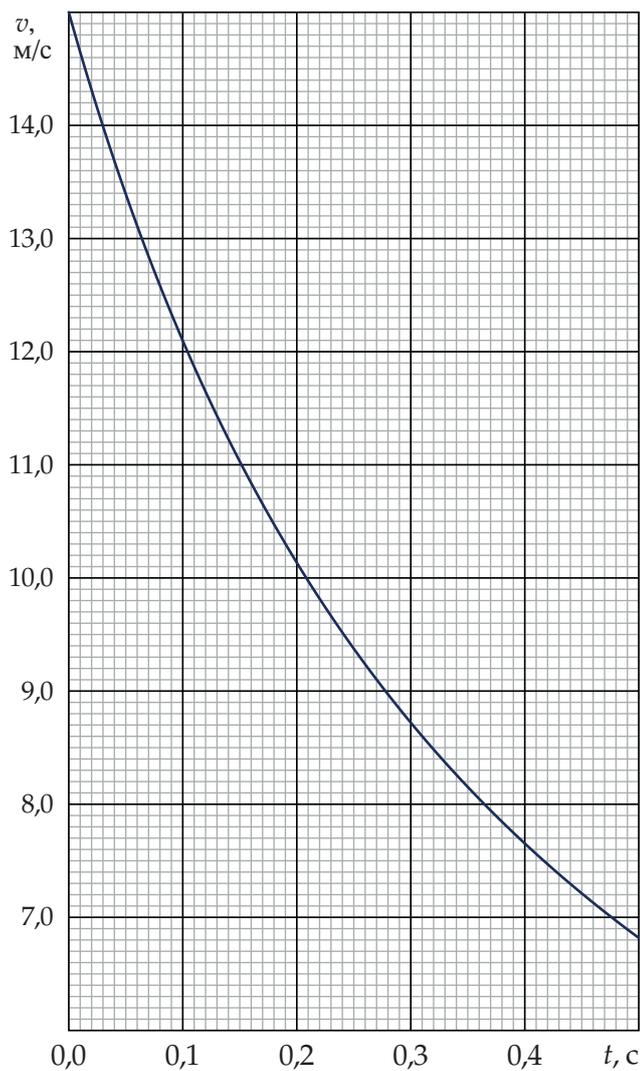


Рис. 5

4. Нелинейные элементы (10 баллов)

Рассмотрим нелинейные элементы Z_1 и Z_2 , сопротивление которых зависит от напряжения на их выводах.

При увеличении напряжения на элементе Z_1 от нуля его сопротивление составляет 100 Ом вплоть до 1,999 В. В узком интервале от 1,999 В до 2,001 В оно линейно возрастает до 200 Ом, после чего остаётся постоянным. Сопротивление элемента Z_2 изменяется противоположным образом: до 1,999 В оно равно 200 Ом, в интервале от 1,999 В до 2,001 В линейно уменьшается до 100 Ом и далее не изменяется.

При анализе цепи следует учитывать конечную ширину переходной области. Однако при построении итоговых графиков этой шириной (0,002 В) можно пренебречь.

- Изобразите вольт-амперные характеристики элементов Z_1 и Z_2 . Напомним, что вольт-амперной характеристикой (ВАХ) называется зависимость силы тока, протекающего через элемент, от напряжения на нём (ток откладывается по оси ординат, напряжение — по оси абсцисс). Рассмотрите только

положительные значения этих величин; на графиках отметьте координаты точек излома.

- Элементы Z_1 и Z_2 соединили последовательно и подключили к регулируемому источнику напряжения. Начиная с некоторого момента напряжение на выводах этого соединения равномерно увеличивается от нуля и через одну минуту достигает 6 В. Затем оно так же равномерно уменьшается и снова становится равным нулю к концу второй минуты опыта.

Изобразите график зависимости силы тока в цепи от времени $I(t)$. На графике необходимо отметить координаты точек излома, а также локальных максимумов и минимумов тока.

5. Через призму (10 баллов)

На рис. 6 приведена фотография листа с текстом олимпиадного задания, на котором лежит прозрачная призма с сечением в форме равностороннего треугольника. Снимок сделан с большого расстояния длиннофокусным объективом, оптическую ось которого старались ориентировать перпендикулярно плоскости листа. Увеличенное изображение этой фотографии приведено на листе 4, см. рис. 8.

- Используя линейку, определите по фотографиям показатель преломления материала призмы с наилучшей возможной точностью.

На рис. 6 приведена фотография листа с текстом олимпиадного задания, на котором лежит прозрачная призма с сечением в форме равностороннего треугольника. Снимок сделан с большого расстояния длиннофокусным объективом, оптическую ось которого старались ориентировать перпендикулярно плоскости листа. Увеличенное изображение этой фотографии приведено на листе 4, см. рис. 8.

Рис. 6

Графические приложения

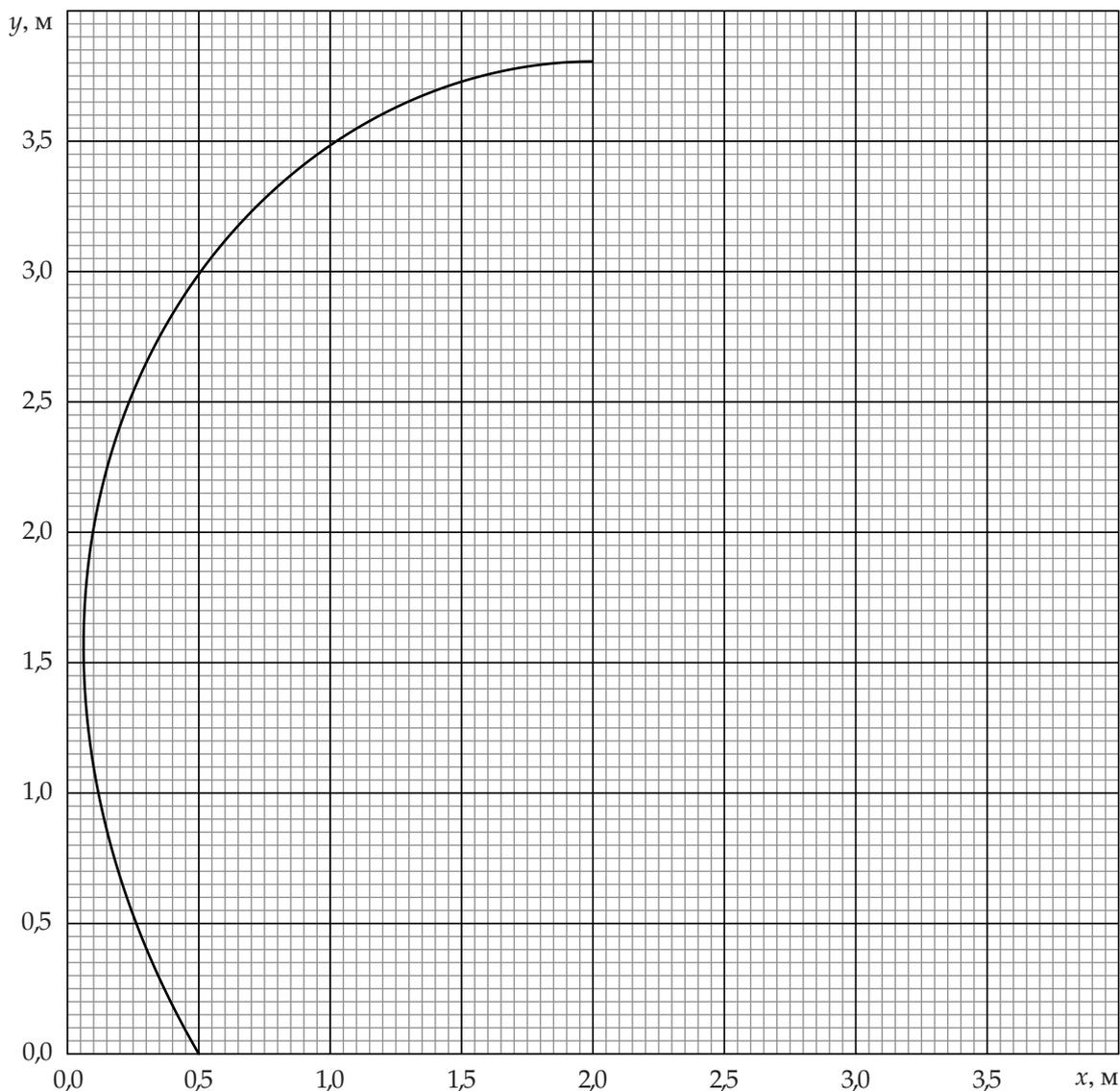


Рис. 7: Траектория движения мяча, к задаче 4

На рис. 6 приведена фотография листа с текстом задания, на котором лежит призма с сечением в форме равнобедренного треугольника. Снимок сделан с большого широкоугольного объектива, оптический центр которого старались ориентировать перпендикулярно к плоскости листа. Увеличенное изображение задания, на котором лежит призма с сечением в форме равнобедренного треугольника. Снимок сделан с большого широкоугольного объектива, оптический центр которого старались ориентировать перпендикулярно к плоскости листа. Увеличенное изображение задания приведено на листе 4, см. рис. 8.

Рис. 8: Увеличенная фотография, к задаче 5