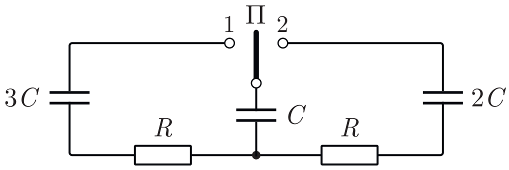
Условия задач, ответы и критерии оценивания

1. **Конденсаторы** (7 баллов),
Крюков П. А.

В цепи, схема которой изображена на рисунке, в начальный момент времени конденсатор ёмкостью $3C = 300$ мкФ заряжен до напряжения $U_0 = 12$ В, конденсаторы ёмкостью C и $2C$ не заряжены. Переключатель П в среднем положении.



Переключатель П сначала перекидывают в положение 1 на короткое время (много меньшее RC), а затем в положение 2 на гораздо большее время. Определите заряды конденсаторов после многократного повторения этих двух операций. Найдите приближённо, какое количество теплоты выделяется в каждом из резисторов.

<u>Ответ</u>: $q_3 = \dfrac{3CU_0}{2} = 5{,}4$ мКл, $q = \dfrac{CU_0}{2} = 1{,}8$ мКл, $q_2 = CU_0 = 3{,}6$ мКл, $Q_1 \approx \dfrac{3CU_0^2}{4} \approx 6{,}5 \cdot 10^{-2}$ Дж, $Q_2 \approx 0$.

Критерии

1) Получена формула $q_3 = \dfrac{3CU_0}{2}$ для заряда конденсатора ёмкостью $3C$ — *0,5 балла*, найдено числовое значение заряда $q_3 = 5{,}4$ мКл, — *0,5 балла*.

2) Получена формула $q_2 = CU_0$ для заряда конденсатора ёмкостью $2C$ — *0,5 балла*, найдено числовое значение заряда $q_3 = 3{,}6$ мКл, — *0,5 балла*.

3) Получена формула $q = \dfrac{CU_0}{2}$ для заряда конденсатора ёмкостью C — *0,5 балла*, найдено числовое значение заряда $q_3 = 1{,}8$ мКл, — *0,5 балла*.

4) Получена формула $Q = \dfrac{3CU_0^2}{4}$ для суммарной энергии, выделяющейся на обоих резисторах, — *0,5 балла*.

5) Получены формулы: $Q_1 \approx Q$ и $Q_2 \approx 0$ для энергии, выделяющейся на каждом из резисторов, — *1 балл*. Найдено числовое значение $Q_1 \approx 6{,}5 \cdot 10^{-2}$ Дж — *0,5 балла*.

6) На основании оценок, как в решении, или любым другим непротиворечивым и доказательным образом объясняется тот факт, что на правом резисторе выделяется пренебрежимо малое количество теплоты по сравнению с теплотой, выделяющейся на левом резисторе, — *2 балла*.

2. **Сосуд во льдах** (8 баллов),
Крюков П. А.

Герметичный металлический сосуд заполняют смесью воздуха и водяного пара и начинают охлаждать, поместив в термостат с тающим льдом. В процессе охлаждения измеряют температуру в сосуде с погрешностью $\Delta T = 0{,}5\,°$C и давление — с погрешностью $\Delta p = 0{,}05 \cdot 10^5$ Па. В результате получают таблицу.

t, °C	137	123	109	82	55	27	0
p, 10^5 Па	1,5	1,45	1,4	1,3	0,8	0,7	0,6

Определите отношение количества воды к количеству воздуха в сосуде, а также плотность газовой фазы в начале и в конце процесса. Учтите, что давление насыщенных паров воды, равное 1 кПа, достигается при температуре около 7 °C. Молярные массы воды и воздуха равны соответственно 18 г/моль и 29 г/моль.

<u>Ответ</u>: $\dfrac{\nu_{\text{возд.}}}{\nu_{\text{вод.}}} = \dfrac{3}{2}$, $\rho_{\text{н}} = 1{,}1\ \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $\rho_{\text{к}} = 0{,}77\ \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Критерии

1) Доказательно объясняется, что в начале процесса пар — насыщенный; делается анализ данных таблицы или строится график зависимости давления от температуры — *1 балл*.

2) Даётся непротиворечивое и доказательное объяснение того факта, что давлением паров в сосуде в конце опыта можно пренебречь — *1 балл*.

3) Получена формула для отношения количеств вещества $\dfrac{\nu_{\text{возд.}}}{\nu_{\text{вод.}}} = \dfrac{p_{\text{возд.}}}{p_{\text{вод.}}}$ — *1 балл*.

4) Верно найдены парциальные давления воздуха и водяных паров в начале процесса: $p_{\text{возд.}} = 0{,}9$ Атм, $p_{\text{вод.}} = 0{,}6$ Атм, а также определено числовое значение отношения количеств вещества $\dfrac{\nu_{\text{возд.}}}{\nu_{\text{вод.}}} = \dfrac{3}{2}$ — *2 балла*.

5) Получена формула и найдено верное числовое значение плотности газовой фазы в начале процесса $\rho_{\text{н}} = \dfrac{p_{\text{возд.}}\mu_{\text{возд.}} + p_{\text{вод.}}\mu_{\text{вод.}}}{RT} = 1{,}1\ \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ — *1 балл + 0,5 балла*.

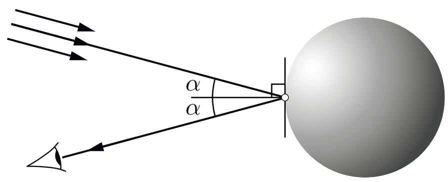
6) Указывается, что плотность газовой фазы в конце процесса равна плотности воздуха, которая не меняется в течение всего процесса. Получена формула и найдено верное числовое значение $\rho_{\text{к}} = \dfrac{p_{\text{возд.}}\mu_{\text{возд.}}}{RT} = 0{,}77\ \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ — *1 балл + 0,5 балла.*

3. Изображения в шаре (9 баллов)

Бычков А. И., Крюков П. А.

Наблюдатель видит изображение Солнца в полированном металлическом шаре. Угловая высота Солнца над горизонтом равна α и равна углу между линией зрения и горизонтальной нормалью к шару. Определите характерный размер изображения Солнца, если радиус шара равен R, а угловой размер Солнца равен φ ($\varphi \ll \alpha$).

Примечание. Для малого угла φ справедливы приближённые формулы: $\cos\varphi \approx 1$, $\sin\varphi \approx 1$.



Ответ: $\Delta L = \dfrac{R\cos\alpha}{2}\varphi$.

Критерии

1) Изображён схематичный рисунок, поясняющий формирование изображения удалённого источника, которое видит наблюдатель, в случае произвольного (не малого) угла α — *2 балла.*

2) Найдены правильные геометрические соотношения (между углами или длинами), которые необходимы для анализа задачи — *1 балл.*

3) Найдено расстояние от точки падения луча, показанного на рисунке к задаче, до изображения Солнца, которое видит наблюдатель при произвольных углах α — *3 балла.*

4) Упомянуто (или изображено), что угол падения пучков параллельных лучей от Солнца изменяется в пределах от α до $\alpha + \varphi$ — *2 балла.*

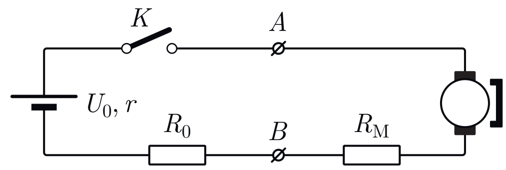
5) Найден характерный размер изображения Солнца $\Delta L = \dfrac{R\cos\alpha}{2}\varphi$ — *1 балл.*

Примечание. Если правильно найден характерный размер Солнца в приближении малых углов ($\alpha \ll 1$), получена формула $\Delta L = \dfrac{R\varphi}{2}$, за решение задачи ставится *3 балла.*

4. Модели стартёра (12 баллов)

Варламов С. Д., Крюков П. А.

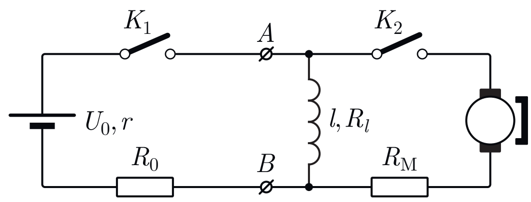
На рисунке изображена простейшая модельная схема подключения электродвигателя (автомобильного стартёра) к аккумулятору.



Параметр схемы $R_{\text{M}} = 2\cdot 10^{-2}$ Ом моделирует сопротивление обмоток якоря двигателя, r и R_0 — внутреннее сопротивление аккумулятора с ЭДС $U_0 = 12$ В и сопротивление проводов, при этом $R_0 + r = 10^{-2}$ Ом. Можно считать, что ЭДС индукции, вырабатываемая электродвигателем, пропорциональна угловой скорости вращения вала $|\mathscr{E}_i| = k\omega$, а момент сил, действующих на вал со стороны магнитного поля, пропорционален току $M = kI$. Для упрощения расчётов далее полагаем, что вал электродвигателя не нагружен.

1) Найдите напряжение U_{AB} на клеммах электродвигателя (между т. A и т. B) сразу после замыкания ключа, а также максимальное значение силы тока в цепи. Чему равен ток в момент, когда угловая скорость вращения вала составляет 75% от максимального значения? (*3 балла*)

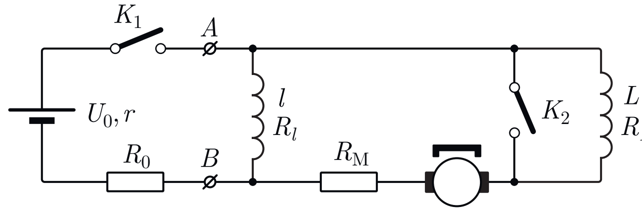
Другая модельная схема (рис. ниже) учитывает наличие в конструкции удерживающей обмотки втягивающего реле, R_l — сопротивление катушки индуктивностью l. При включении сначала замыкается ключ K_1, а когда ток через катушку установится, замыкается ключ K_2.



2) Считая, что отношение $\alpha = \dfrac{R_l}{r + R_0}$ известно ($\alpha > 1$), определите максимальное значение тока через двигатель в этом случае. (*4 балла*)

3) При выключении электродвигателя (после того, как скорость вращения вала установится) сначала размыкают ключ K_1. При этом напряжение на клеммах двигателя почти мгновенно увеличивается на $\Delta U_{AB} = 2$ В. Определите по этим данным параметр α. (*3 балла*)

Наиболее близка к реальному устройству схема, изображенная на третьем рисунке. Ключи изначально разомкнуты. Поворот ключа зажигания соответствует замыканию ключа K_1. Когда ток через катушку L достигает некоторого порогового значения $I_{\text{п}}$ замыкается ключ K_2 (магнитное поле катушки втягивает шток, замыкающий контакты ключа K_2).



4) Индуктивность второй катушки L и её сопротивление R_L таковы, что выполняются равенства: $L = 10l$, $R_l = 5R_L$. Известно, что значение тока $I_п$ лежит между 10 А и 20 А. Чему равен ток через катушку индуктивностью l в момент замыкания ключа K_2? Численное значение параметра α считайте известным из п. 3). (*2 балла*)

Критерии

Общее пожелание: при проверке данной задачи не учитывать error propagation — распространение ошибки при вычислении некоторых начальных величин на итоговый результат.

1) Получена формула для напряжения $U_{AB}(0)$ и верно найдено числовое значение

$$U_{AB}(0) = \frac{U_0 R_M}{r + R_0 + R_M} = 8 \text{ В} - \textit{1 балл.}$$

Указано, что наибольший ток протекает в цепи в момент замыкания ключа, получена формула и верное числовое значение

$$I_{\max} = \frac{U_0}{r + R_0 + R_M} = 400 \text{ А} - \textit{1 балл.}$$

Указано, что в момент, когда скорость вала составляет 75 % от максимального значения, ЭДС индукции равна 75 % от своего максимально значения и равна 9 В. Найдено верное значение тока в этот момент времени, равное $I = 100$ А — *1 балл.*

2) Получена формула для установившегося тока через катушку

$$I_l = \frac{U_0}{r + R_0} \cdot \frac{1}{1+\alpha} - \textit{1 балл.}$$

Указано, что максимальный ток достигается сразу после замыкания ключа, при этом ток через катушку не успевает измениться, записано уравнение обхода контура с одной неизвестной (как в решении или аналогичное) — *2 балла.*
Получена формула для максимального тока через мотор

$$I_M = \frac{U_0}{r + R_0 + R_M} \cdot \frac{\alpha}{1+\alpha} - \textit{1 балл.}$$

3) Указано, что в установившемся режиме ток через двигатель равен нулю, через катушку течёт ток I_l, при этом сразу после размыкания ключа K_1 ток I_l потечёт через электродвигатель — *1 балл.*

Получено уравнение для нахождения α

$$\Delta U_{AB} = U_0 \frac{R_M}{r + R_0} \cdot \frac{1}{1+\alpha} - \textit{1,5 балла.}$$

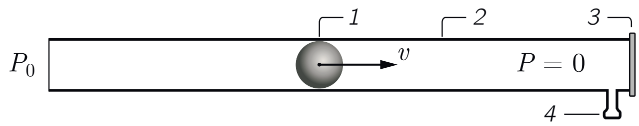
Верно найдено числовое значение $\alpha = 11$ — *0,5 балла.*

4) Показано, что время установления тока через катушку индуктивностью L не менее, чем в 30 раз больше, чем время установления тока через катушку с индуктивностью l, — *1 балл.*
Сделан вывод о том, что через катушку с индуктивностью l течёт ток, равный току в установившемся режиме, получено верное значение этого тока, равное $I_l^{(2)} = 100$ А, — *1 балл.*

Ответ: 1) $U_{AB}(0) = 8$ В, $I_{\max} = 400$ А, $I = 100$ А; 2) $I_{\max}^{(1)} = \dfrac{\alpha}{1+\alpha} \cdot 400$ А; 3) $\alpha = 11$. 4) $I_l^{(2)} = 100$ А.

5. Вакуумная пушка (12 баллов), Крюков П. А.

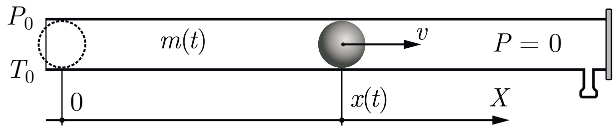
В последние годы большой интерес у энтузиастов, занимающихся научно-техническим творчеством, вызывает устройство под названием «вакуумная пушка». В полипропиленовой водопроводной трубе 2 (см. рисунок ниже), один конец которой герметично закрыт заглушкой из фольги 3, а другой открыт в атмосферу, разностью давлений ускоряется шарик 1 для игры в пинг-понг. Внутренний диаметр трубы близок к диаметру шарика. Рядом с заглушкой располагается штуцер 4, через который труба соединяется с вакуумным насосом. Таким образом, справа от шарика давление очень низкое, а у открытого конца трубки — давление, близкое к атмосферному, которое равно P_0.



Оказывается, что при достаточно большой длине трубки и качественной откачке, шарик можно разогнать до высокой скорости, так что он легко разорвёт фольгу заглушки и вылетит из трубки. В одном видеоролике, доступном в сети, демонстрируется, как вылетающий из трубки шарик пробивает пустые банки из-под газировки, поставленные на небольшом расстоянии от трубки.

1) В самой грубой модели предполагается, что слева от шарика давление равно $P_0 = 10^5$ Па, а справа — равно нулю. Разность давлений не меняется в процессе разгона шарика. Трения между шариком и стенками трубы нет. До какой максимальной скорости $v_{\max}^{(1)}$ может быть разогнан шарик массой $M = 2{,}7$ г и диаметром $d = 40$ мм в трубе длиной $L = 2$ м? (*1 балл*)

В более точной модели считается, что под действием постоянной разности давлений ускоряется не только шарик, но и воздух массой $m(t)$, располагающийся в момент t в трубе слева от шарика, а также вовлекаются в движение новые порции воздуха из атмосферы. Предлагается считать, что область вблизи левого торца трубы, в которой воздух вовлекается в движение, имеет малый характерный размер, сопоставимый с диаметром трубы. Снаружи трубы вне этой области воздух остаётся неподвижным. Внутри трубы воздух движется со скоростью шарика, а его плотность равна плотности воздуха ρ снаружи. Диаметр шарика много меньше длины трубы. В начальный момент времени координата x шарика и его скорость равны нулю.



2) Определите более точное значение скорости $v^{(2)}_{\max}$, до которой может быть разогнан шарик тех же размеров, что и в п. 1) задачи, в трубе той же длины. Время разгона в первом приближении можно считать равным времени разгона в п. 1). Температура воздуха и его молярная масса равны: $T_0 = 293$ К, $\mu = 29$ г/моль соответственно. (*3 балла*)

3) Считая известными только температуру $T_0 = 293$ К снаружи трубы и молярную массу воздуха $\mu = 29$ г/моль, определите максимальную скорость, до которой может быть разогнан шарик. Длина трубы предполагается достаточно большой. (*3 балла*)

4) Даны параметры: M, S, P_0, ρ, μ. Получите формулу зависимости координаты шарика от времени $x(t)$. (*5 баллов*)

Примечание. Может оказаться полезной формула $\Delta(x^2) = 2x\Delta x$, справедливая для малых изменений ($\Delta x \ll x$) величины x.

Ответ: 1) $v^{(1)}_{\max} = \sqrt{2La} \approx 430$ м/с;

2) $v^{(2)}_{\max} = \dfrac{P_0 S t_0}{\rho S L + M} \approx 199$ м/с;

3) $u = \sqrt{\dfrac{P_0}{\rho}} = \sqrt{\dfrac{RT_0}{\mu}} \approx 294$ м/с;

4) $x(t) = -\dfrac{M}{\rho S} + \sqrt{\left(\dfrac{M}{\rho S}\right)^2 + \dfrac{P_0 t^2}{\rho}}$.

Критерии

Общее пожелание: при проверке данной задачи не учитывать error propagation — распространение ошибки при вычислении некоторых начальных величин на итоговый результат.

1) Получено верное значение скорости $v^{(1)}_{\max} \approx 430$ м/с, — *1 балл.*

2) Записан второй закон Ньютона в «импульсном» виде $P_0 S\Delta t = (m(t) + M)\Delta v + v(t)\Delta m$ или аналогичная формула, — *1 балл.*

Показано, что полученное уравнение можно просуммировать (проинтегрировать), получена формула

$$v(t_0) = \frac{P_0 S t_0}{m(t_0) + M}, \text{ — 1,5 балла.}$$

Получено верное значение максимальной скорости, равное $v^{(2)}_{\max} \approx 199$ м/с, — *0,5 балла.*

3) Указано, что в момент, когда шарик достигает максимальной скорости, действие сил давления за малое время сводится к вовлечению в движение с максимальной скоростью небольшой массы воздуха — *0,5 балла.*

Получено соотношение $P_0 S\Delta t = u\Delta m$ или аналогичное — *1 балл.*

Получена формула для определения максимально возможной скорости $P_0 = \rho u^2$ — *1 балл.*

Найдено числовое значение скорости, равное $u \approx 294$ м/с — *0,5 балла.*

4) Получено уравнение $P_0 St = Mv + \rho Sxv$ или аналогичное — *1 балл.*

Уравнение домножено на Δt и просуммировано (проинтегрировано), получено уравнение $P_0 St^2 = 2Mx + \rho Sx^2$ или аналогичное — *3 балла.*

Решено квадратное уравнение и получена искомая формула

$$x(t) = -\frac{M}{\rho S} + \sqrt{\left(\frac{M}{\rho S}\right)^2 + \frac{P_0 t^2}{\rho}}, \text{ — 1 балл.}$$

Внимание!

Решение на основе закона сохранения энергии, при котором в п. 2) получается формула

$$P_0 SL = \frac{Mv^2}{2} + \frac{\rho SLv^2}{2}$$

или аналогичное соотношение, не является правильным, поскольку в задаче предлагается рассматривать ускорение шарика и воздуха, как движение тела с переменной массой, а в законе сохранения, записанном выше, считается, что масса воздуха при движении не меняется.

Решение, основанное на энергетических соображениях, при котором в п 4) получается формула

$$P_0 Svt = \frac{Mv^2}{2} + \frac{\rho Sxv^2}{2}$$

или аналогичное соотношение, также не является правильным, поскольку крайне необоснованным выглядит использование выражения $A = P_0 Svt$ для работы сил давления.