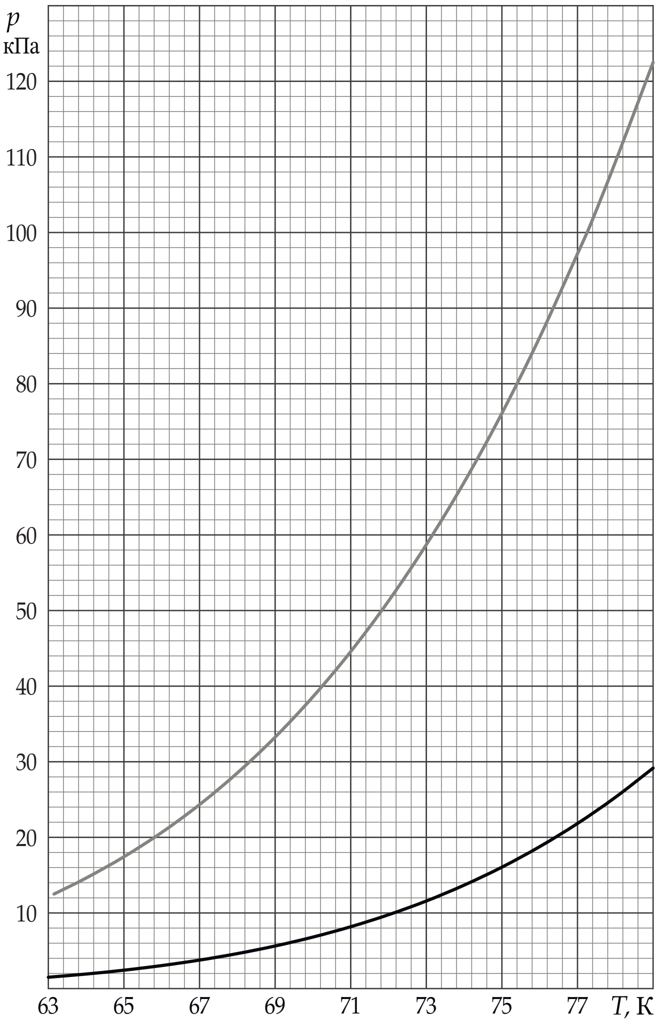
Условия задач, ответы и критерии оценивания

1. Неправильный воздух (8 баллов)

Бычков А. И., Крюков П. А.

Отношение количества кислорода к количеству азота в некотором объёме «неправильного воздуха» равно 1 : 5. На рисунке изображены графики зависимости давления насыщенных паров азота и кислорода от температуры, при этом линия чёрного цвета соответствует давлению паров кислорода. Температура неправильного воздуха в начальный момент равна $t_0 = -120\ ^\circ\mathrm{C}$.



В процессе охлаждения в некоторый момент времени кислород и азот начинают конденсироваться одновременно. Используя график, определите как можно точнее, каким было начальное давление неправильного воздуха, если охлаждение производилось изобарически. А если изохорически?

Ответ: $p_1 = 72$ кПа $\pm\, 5$ кПа, $p_2 = 151$ кПа $\pm\, 12$ кПа.

Критерии

По существу задачу едва ли можно назвать сложной, поэтому представляется разумным основное внимание при оценивании решений уделить точности определения температуры и давления в точке конденсации. Сетка на графике в условии задачи позволяет определить температуру конденсации с точностью до 1 %, а давление азота в точке конденсации с точностью до $\frac{4}{15} \approx 6{,}7$ %.

Промежуточные результаты, полученные в процессе решения, предлагается оценивать по схеме, изложенной ниже.

Найдено значение давления азота при температуре конденсации, попадающее в диапазон: $p_\mathrm{N} = 60$ кПа $\pm\, 4$ кПа, или найдено значение температуры конденсации, попадающее в диапазон: $T_\text{к} = 73$ К $\pm\, 0{,}8$ К, — *5 баллов*. Если значение p_N или $T_\text{к}$ получено, но в указанный диапазон не попадает — *2 балла*.

Найдено давление смеси при изобарном охлаждении, попадающее в диапазон: $p_1 = 72$ кПа $\pm\, 5$ кПа, — *1 балл*.

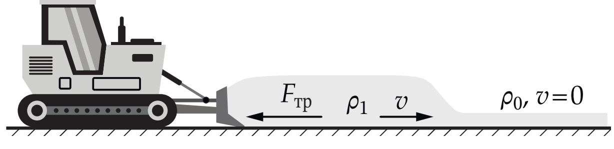
Найдено давление смеси при изохорном охлаждении, попадающее в диапазон: $p_2 = 151$ кПа $\pm\, 12$ кПа, — *2 балла*.

Если ошибка в определении давления p_1 или p_2 связана с неверным определением давления одного из газов, при этом с физической точки зрения расчёт давления сделан верно, то количество баллов, выставляемых за последние два пункта, не уменьшается. Баллы, полученные за промежуточные результаты, суммируются.

2. Похоже на уборку снега (9 баллов)

Механический фольклор

Некоторые особенности процесса сгребания снега бульдозером можно описать на основе следующей простейшей модели. Вдали от бульдозера (см. рис.) слой снега имеет линейную плотность ρ_0 и покоится. Бульдозер и часть снега, прилегающая к его щиту, движутся с постоянной скоростью v. На движущуюся часть действует сила трения, удовлетворяющая закону Кулона-Амонтона: $F_\text{тр} = \mu N$; коэффициент трения μ считается известным. Ускорение свободного падения равно g.



А. Пусть весь снег, вовлекаемый бульдозером в движение, распределяется в движущейся части со средней постоянной линейной плотностью ρ_1. Бульдозер в состоянии развить мощность не более, чем W_0. Найдите время t, в течение которого возможно движение бульдозера с постоянной скоростью v. (*6 баллов*)

В. Пусть после того, как масса снега в движущейся части достигает некоторого значения M_0, она перестаёт увеличиваться. При вовлечении в движение порции снега, такая же порция покидает движущуюся часть, скатываясь вбок относительно направления движения. Какую мощность W_1 должен развивать бульдозер при движении с постоянной скоростью v в этом случае? (*3 балла*)

Ответ: А) $t = \frac{W_0}{\mu g v^2} \cdot \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 \rho_0} - \frac{v}{\mu g}$; В) $W_1 = \mu M_0 g v + \rho_0 v^3$.

Критерии

Правильные ответы, подкреплённые непротиворечивыми, доказательными рассуждениями, оцениваются полным баллом, даже если решение отличается от авторского. Наиболее сложной проблемой, возникающей в процессе ответа на вопрос в каждой из частей, по всей видимости, является запись уравнения динамики (второй закон Ньютона, закон изменения импульса или что-то подобное), поэтому движение в правильном направлении в этой части решения следует поощрять. Промежуточные результаты, полученные в процессе решения, предлагается оценивать по схеме, изложенной ниже.

Тем или иным образом высказывается мысль о том, что скорость границы раздела в части **А** отличается от скорости бульдозера — *0,5 балла*. Если скорость границы раздела найдена верно, получена формула

$$u = \frac{\rho_1 v}{\rho_1 - \rho_0},$$

при этом обоснование может быть кратким, либо вообще отсутствовать — *1,5 балла*.

Записано уравнение движения в части **А**, получена формула

$$F = \mu M(t) g + \frac{dm}{dt} v,$$

или аналогичная для произвольного момента времени t, при этом решение содержит краткое непротиворечивое обоснование полученной формулы — *2 балла*. Если обоснование отсутствует — *1 балл*.

В части **А** получена верная зависимость массы движущейся части от времени

$$M(t) = \frac{\rho_1 \rho_0}{\rho_1 - \rho_0} \cdot vt,$$

при этом обоснование может отсутствовать — *1 балл*.

В части **А** указывается, что максимальная мощность силы давления достигается, когда масса движущейся части становится максимальной — *0,5 балла*.

Оценка за любые разумные рассуждения, не упомянутые выше, при ответе на вопрос части **А** выставляется на усмотрение проверяющего на основе схемы распределения баллов, изложенной выше.

В части **В** верно записано уравнение движения, получена формула

$$F = \mu M_0 g + \rho_0 v^2$$

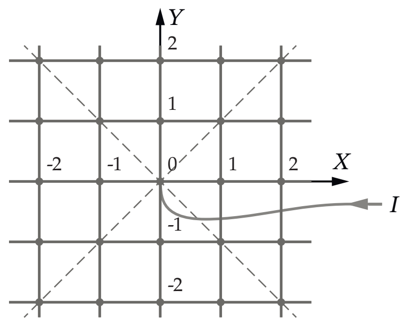
или аналогичная, при этом решение содержит краткое непротиворечивое обоснование полученной формулы — *2 балла*. Если обоснование отсутствует — *1 балл*.

Баллы, полученные за отдельные результаты в пунктах, описанных выше, суммируются.

3. Ну, очень большая сетка (10 баллов)

Крюков П. А.

Сетка в форме квадрата состоит из очень большого количества ячеек. В узел с координатами $(0, 0)$, совпадающий с центром квадрата, втекает ток $I = 4$ А (см. рисунок). Сопротивление любого проводника, соединяющего соседние узлы сетки, равно 1 Ом.



А. Пусть узлы сетки на стороне большого квадрата подключены к специальному источнику напряжения, так что потенциалы узлов, лежащих на диагоналях (см. рис., пунктирные линии), равны нулю везде кроме центра квадрата, где потенциал равен 1В. Определите потенциалы φ_{1k} в узлах с координатами $(k + 1, k)$, и потенциалы φ_{2k} в узлах с координатами $(k + 2, k)$ при $k \geq 0$. (*4 балла*)

В. Источник напряжения заменили на другой — ещё более специальный. Теперь потенциалы узлов и на диагоналях, и в центре равны нулю. Чему равны потенциалы φ_{1k} в узлах с координатами $(k + 1, k)$, и потенциалы φ_{2k} в узлах с координатами $(k + 2, k)$ при $k \geq 0$ в этом случае? (*6 баллов*)

Ответ: А) $\varphi_{1k} = 0$, $\varphi_{2k} = (-1)^{k+1}$ В;
В) $\varphi_{1k} = (-1)^{k+1}$ В, $\varphi_{2k} = 4(k + 1) \cdot (-1)^{k+1}$ В.

Критерии

Существуют разные способы решения этой задачи, поэтому предлагается в первую очередь оценивать ответы. Верные ответы оцениваются полным баллом, даже если отсутствует доказательство полученной формулы.

В части **А** правильный ответ на первый вопрос:

$\varphi_{1k} = 0$ — *1,5 балла*. Правильный ответ на второй вопрос: $\varphi_{2k} = (-1)^{k+1}$ В — *2,5 балла*.

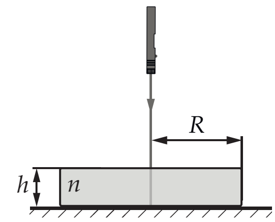
В части **B** правильный ответ на первый вопрос: $\varphi_{1k} = (-1)^{k+1}$ В — *2 балла*. Правильный ответ на второй вопрос: $\varphi_{2k} = 4(k+1)\cdot(-1)^{k+1}$ В — *4 балла*.

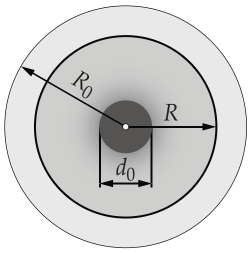
Промежуточные верные рассуждения и результаты оцениваются на усмотрение проверяющего. Рекомендуется выставлять не более трети от максимального количества баллов за соответствующий пункт.

4. Ореол и тёмный круг (10 баллов)

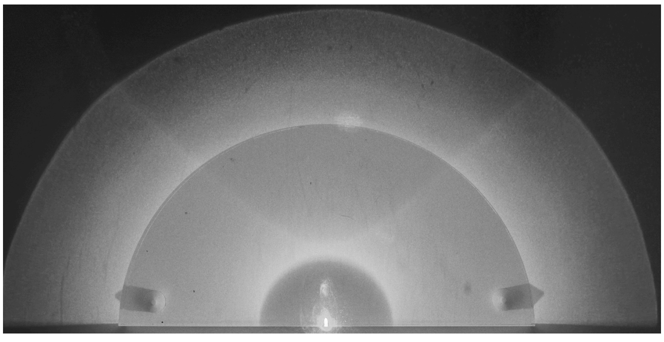
Крюков П. А., Бычков А. И.

На горизонтальной поверхности располагается диск радиусом R и толщиной h, сделанный из стекла с показателем преломления $n = 1{,}5$ (рис. ниже, слева). Нижняя матовая сторона диска отражает свет диффузно (иначе говоря, равномерно в любых направлениях). Верхняя и боковая поверхности диска тщательно отшлифованы. Луч мощной лазерной указки, освещающей диск, направлен вдоль его оси. При рассматривании диска сверху (рис. ниже, справа) наблюдаются: ярко выраженный тёмный круг с нечёткой границей диаметром d_0 и светлый ореол с резкой границей в виде концентрической с диском окружности радиусом R_0.





Ниже вы видите фотографию, полученную при проведении опыта, похожего на описанный выше. Мощной лазерной указкой освещалась нижняя точка середины половинки стеклянного диска. Можно различить тёмный полукруг с размытой границей и светлый ореол с резкой границей.



A. Известно, что толщина диска равна $h = 14$ мм, а отношение радиусов диска и границы ореола равно $\dfrac{R_0}{R} \approx 1{,}65$ (это значение получается при измерениях по фотографиям опытов). Найдите радиус диска R. (*5 баллов*)

B. Чем может быть обусловлено возникновение тёмного круга? Оцените его радиус r_0, считая показатель преломления и толщину диска известными. (*5 баллов*)

Примечание. Можно считать, что в условиях данной задачи для лучей, выходящих из стекла в воздух, от границы раздела отражается не более 10 % энергии падающего излучения, если величина угла падения меньше 37°.

Ответ: А) $R = h\sqrt{\frac{n^2-1}{1-(0{,}65n)^2}} \approx 70$ мм; В) $r_0 = 2h\,\mathrm{tg}\,\beta \approx 23$ мм $\pm$ 2 мм.

Критерии

В части **A** верно указан ход луча, формирующего границу ореола, но конечный ответ не получен (или получен неверный ответ) вследствие вычислительных ошибок — *3 балла*. Правильный, обоснованный ответ — *5 баллов*. Если обоснование отсутствует — *4 балла*.

В части **B** получен правильный, обоснованный ответ — *5 баллов*.

В части **B** тем или иным образом высказана мысль о том, что точки тёмного круга — это вторичные источники малой интенсивности, порождаемые лучами, отражёнными от верхней поверхности диска, — *2,5 балла*.

В части **B** конечный ответ не получен (или получен неверный ответ) вследствие вычислительных ошибок (при этом дано верное объяснение эффекта) — *3,5 балла*.

В части **B** получен верный ответ, но никакого обоснования не приводится — *2,5 балла*.

Промежуточные верные рассуждения и результаты оцениваются на усмотрение проверяющего. Рекомендуется выставлять не более *1 балла* в каждой из частей за разумные рассуждения, не приводящие к объяснению эффекта или ответу.

5. Устойчивость атмосферы (13 баллов)

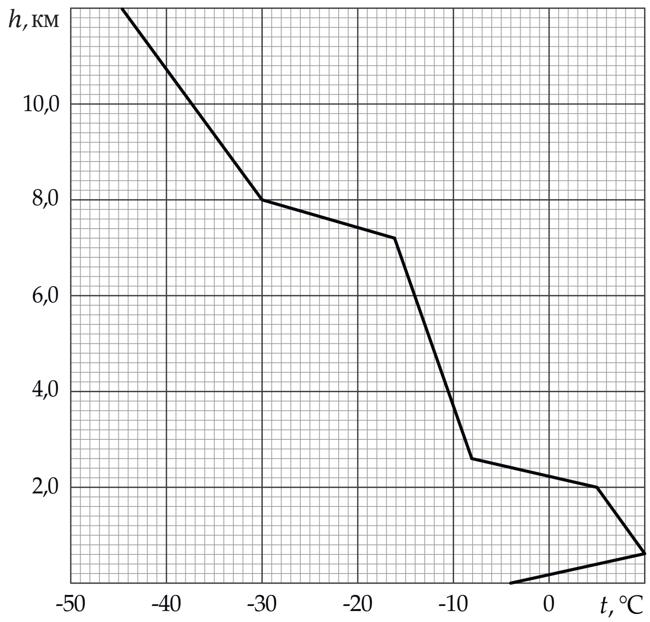
Крюков П. А.

A. *Сухой адиабатой* называется такое распределение температуры $T_a(h)$ в атмосфере Земли, что при увеличении высоты малой порции (в метеорологии их называют частицами) сухого воздуха на небольшую величину Δh без теплообмена с окружающими частицами её температура изменяется на малую величину ΔT_a. Найдите ΔT_a, считая Δh известным. Ускорение свободного падения равно $g = 10$ м/с^2. Средние молярные масса и теплоёмкость воздуха при постоянном объёме равны: $\mu = 29$ г/моль и $c_V = 2{,}5R$ ($R = 8{,}3$ Дж/(моль·К)) соответственно. Движением воздушных масс можно пренебречь. (*6 баллов*)

Указание. Для малых изменений параметров идеального газа (T, p, V) или (T, p, ρ), где ρ — плотность, из уравнения состояния следуют формулы:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta V}{V}, \qquad \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta p}{p} - \frac{\Delta \rho}{\rho}.$$

В. В естественных условиях равновесное распределение температуры воздуха по высоте имеет сложный вид. Линия на графике ниже моделирует зависимость $t(h)$, возникшую в воздухе над городом X в день Y. В физике атмосферы принято откладывать температуру по горизонтальной оси.



Устойчивым является такое равновесное состояние воздуха в атмосфере, что при *адиабатическом* смещении частицы воздуха из положения равновесия по вертикали на небольшую величину Δh, действующие на неё силы стремятся вернуть эту частицу в положение равновесия. Укажите на графике границы (по высоте) участков устойчивой атмосферы. Воздух предлагается считать сухим, наличием паров воды и движением воздушных масс пренебречь, значения, заданные в части **А** задачи, можно считать известными. (*7 баллов*)

Ответ: атмосфера устойчива на высоте: от 0 до 600 м, от 2000 м до 2600 м, от 7200 м до 8000 м.

Критерии

Решения в части **А** предлагается оценивать на основании следующей схемы.

Получено соотношение, связывающее изменения давления и высоты: $\Delta p = -\rho g \Delta h$, или аналогичное — *1 балл.*

Верно записано условие отсутствия теплообмена в форме соотношения $\frac{5}{2} \cdot \frac{\Delta T_a}{T} = -\frac{\Delta V}{V}$ или аналогичного — *1 балл*, если записано соотношение $\frac{\Delta p}{p} = \frac{7}{2} \cdot \frac{\Delta T_a}{T}$ или аналогичное — *1 балл.*

Получен правильный ответ в общем виде $\Delta T_a = -\frac{2\mu g}{7R} \cdot \Delta h$ — *2,5 балла.* Если верно вычислено значение коэффициента пропорциональности: $\frac{2\mu g}{7R} \approx 10\ ^\circ\mathrm{C}/\text{км}$ — *0,5 балла.*

Решения в части **В** предлагается оценивать на основе следующей схемы.

Высказывается мысль о том, что для установления условия устойчивости следует сравнить плотность частицы, смещённой на малую величину Δh вдоль сухой адиабаты, и плотность окружающего воздуха на той же высоте — *1 балл.*

Получено выражение для изменения плотности на сухой адиабате $\Delta\rho_a$ — *1 балл.*

Получено выражение для изменения плотности воздуха в атмосфере с температурным профилем, показанным на графике $\Delta\rho$, — *2 балла.*

Найдено условие устойчивости в виде неравенства: $\alpha < \frac{2\mu g}{7R}$ (где $(-\alpha)$ — угловой коэффициент касательной к графику профиля температуры) или аналогичное, — *2 балла.*

Получен верный ответ — *1 балл.*