

ПРИЛОЖЕНИЕ 7.1
К КУРСУ О.Ю.ШВЕДОВА
«УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА»

задания для разбора с преподавателем

1. Уравнения и неравенства с модулями

У1а.1 (Сканави, 9.009) Решите уравнение $|x + 1| + |x - 1| = 2x^3$.

У1а.2 (географы, 2000) Решите уравнение $|2x + 8| - |x - 5| = 12$.

У1а.3 (физфак, 1997) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} y - |x - 3| = 1, \\ |x - y| = 3. \end{cases}$$

У1а.4 (психологи, 1998) Решите уравнение $|4x - |x - 2| + 3| = 16$.

У1а.5 (Сканави, 9.012) Решите неравенство $x^2 - 5|x| + 6 < 0$.

У1а.6 (химфак, 1996) Решите неравенство $|x + |1 - x|| > 3$.

У1а.7 (физфак, 1993) Решите неравенство:

$$\left| \frac{2x - 1}{x - 1} \right| > 2.$$

У1а.8 (почвоведы, 2005) Решите неравенство $|x - 1| \leq |x|$.

У1а.9 (физфак, 2004) Решите неравенство

$$\frac{|x - 3|}{2 - \frac{8}{|x-3|}} < -1.$$

У1а.10 (физфак, 1996) Решите неравенство $-3 < |x^2 - 9| < 16$.

2. Уравнения и неравенства с радикалами

У2а.1 (физфак, 2000) Решите уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1} = \sqrt{3x-1}.$$

У2а.2 (физфак, 2002) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3\sqrt{3x^2 - y^4} = 2x - 7y, \\ 6\sqrt{3x^2 - y^4} = x - 8y. \end{cases}$$

У2а.3 (ВШБ, 2004) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{y+2} = 1 \\ x - y = 22 \end{cases}$$

У2а.4 (физфак, 2005) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2\sqrt{x-y} = y + 3, \\ |(x+1) + 2y| + 2|x + 2(y-1)| = 3. \end{cases}$$

У2а.5 (физфак, 1999) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 3x + 2} - |y + 2| = 0, \\ 2\sqrt{y^2 + 4y + 4} + \sqrt{x^2 - x - 2} = 0. \end{cases}$$

У2а.6 (физфак, 2002) Решите неравенство:

$$\frac{\sqrt{5-x}}{3-x} < 1.$$

У2а.7 (физфак, 2006) Решите неравенство

$$\sqrt{(4-x)\sqrt{2x^2 - 2x - 4}} \leq 4 - x.$$

У2а.8 (физфак, 2003) Решите неравенство $\sqrt{12x^2 + 54x + 6} + |2x^2 + 9x| \geq 11$.

У2а.9 (Ломоносов-2006) Решите неравенство $\sqrt{4-x} - 2 \leq x|x-3| + 4x$.

У2а.10 (почвоведы, 2002) Решите неравенство

$$6^{\sqrt[10]{x}} \leq 10^{\sqrt[6]{x}}.$$

3. Показательные уравнения и неравенства

У3а.1 (Сканави, 7.016) Решите уравнение $5^{x+6} - 3^{x+7} = 43 \cdot 5^{x+4} - 19 \cdot 3^{x+5}$.

У3а.2 (социофак, 2005) Решите уравнение $2 \cdot 4^{3x} - 5 \cdot 8^x + 2 = 0$.

У3а.3 (Ломоносов-2007) Решите уравнение

$$\sqrt{2^{(x^2)}} = (2^{\sqrt[5]{x}})^5.$$

У3а.4 (физфак, 1994) Решите уравнение:

$$7^{\sqrt{x}} - 2 \cdot 7^{2-\sqrt{x}} = 47.$$

У3а.5 (экономисты, 2003) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3 \cdot 4^x + 2^{x+1} \cdot 3^y - 9^y = 0, \\ 2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x \cdot 3^y + 9^y = -8. \end{cases}$$

УЗа.6 (физфак, 2004) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 7 \cdot 2^{2x-y} - 5\sqrt{4x-y} = 56 - 10x, \\ 2 \cdot 2^{2x-y} + 3\sqrt{4x-y} = 6x + 16. \end{cases}$$

УЗа.7 (Сканави, 8.051) Решите неравенство $25^x < 6 \cdot 5^x - 5$.

УЗа.8 (физфак, 2001) Решите неравенство

$$\frac{3^x + 2x - 35}{x - 4} \leq 2.$$

УЗа.9 (физфак, 2002) Решите неравенство

$$8 \cdot \frac{3^{x-2}}{3^x - 2^x} > 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x.$$

УЗа.10 (физфак, 2001) Решите неравенство:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} \cdot 3^{\sqrt{2-x}} > \frac{1}{9}.$$

4. Логарифмические уравнения и неравенства

У4а.1 (Сканави, 7.081) Решите уравнение: $2 \log_3(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0$.

У4а.2 (физфак, 1974) Решите уравнение: $64 \log_9^3 \sqrt{x} - 4 \sqrt{\log_3^3 x + 3} = 0$.

У4а.3 (психологи, 2003) Решите уравнение $\log_{3x+3} 5 = 2$.

У4а.4 (физфак, 1996) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_2(3y^2 - x^2) = 3 \\ 8 \log_{16}(-x) + \log_2 y^2 = 4. \end{cases}$$

У4а.5 (Сканави, 8.068) Решите неравенство

$$2 \log_8(x-2) - \log_8(x-3) > \frac{2}{3}.$$

У4а.6 (филфак, 2005) Решите неравенство $\log_2(x+1) > \log_{x+1} 16$.

У4а.7 (физфак, 2006) Решите неравенство:

$$\log_4(4-x)^2 - \log_2 \frac{4-x}{5-x} > 0.$$

У4а.8 (физфак, 2001) Решите неравенство

$$\log_7 \left(\log_3 \frac{x-1}{x+1} \right) < \log_{\frac{1}{49}} \left(\log_{\frac{1}{9}} \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1} \right).$$

У4а.9 (физфак, 1995) Решите неравенство $\sqrt{\log_4(x-5)} > \log_{1/4} \frac{64}{x-5}$.

У4а.10 (физфак, 2001) Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{3}{2} \log_9(4x^2-3)} > \log_3 \sqrt{4x^2-3}.$$

5. Тригонометрические уравнения и неравенства

У5а.1 (Сканави, 5.003) Решите уравнение $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin 3x$.

У5а.2 (Сканави, 5.181) Решите уравнение $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0$.

У5а.3 (Сканави, 5.184) Решите уравнение $4 \cos x \cos 2x \cos 3x = \cos 6x$.

У5а.4 (физфак, 2006) Решите уравнение

$$\cos 7x = \frac{3\pi}{2} \cdot \cos x - \cos 5x.$$

У5а.5 (физфак, 2005) Решите уравнение $2 \cos 3x \cdot \cos 8x - \cos 6x = 1$.

У5а.6 (физфак, 2002) Решите уравнение

$$\cos x - \cos 3x = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x.$$

У5а.7 (физфак, 2001) Решите уравнение $\operatorname{tg}(2x+5) \cdot \operatorname{ctg}(x+2) = 1$.

У5а.8 (ФНМ, 2002) Решите уравнение

$$\sqrt{3} \sin(3x - \pi/5) + 2 \sin(8x - \pi/3) = 2 \sin(2x + 11\pi/15) + 3 \cos(3x - \pi/5).$$

4

У5а.9 (филфак, 2002) Решите уравнение

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + \sqrt{3}(\cos x - \sin x)} = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}.$$

У5а.10 (геологи, 2002) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2 \sin(2x+y) \sin y = \cos 2x, \\ \sin 2x - \sin 2y = \sqrt{2}. \end{cases}$$

6. Целочисленная математика

Уба.1 (8, задача 295) Вася сказал, что на его дне рождения было больше 6 гостей. А его сестра сказала, что гостей было больше 5. Сколько было гостей, если известно, что одно утверждение верное, а другое ложное?

Уба.2 (10, задача 8.3.C10) 90 одинаковых ластиков стоят 321 рубль с копейками. Найдите стоимость одного такого ластика.

Уба.3 (Сканави, 3.088) Ученику надо было найти произведение числа 136 на некоторое двузначное число, в котором цифра единиц вдвое больше цифры десятков. По рассеянности он поменял местами цифры двузначного числа, отчего и получил произведение на 1234 больше истинного. Чему равно истинное произведение?

Уба.4 (Сканави, 3.218) Какое двузначное число меньше суммы квадратов его цифр на 11 и больше их удвоенного произведения на 5?

Уба.5 (Сканави, 3.226) Результат умножения двух положительных чисел, полученный школьником, показался ему сомнительным. Для проверки он решил разделить результат на больший сомножитель. В частном получилось 17 и в остатке 8. Тогда школьник понял свою ошибку: оказалось, что цифра десятков, записанная им в произведении, больше истинной цифры десятков на 6. Какие числа перемножал школьник, если известно, что их разность равна 36?

Уба.6 (ВМК, 1986) В академическом собрании сочинений, включающем менее 20 томов, число томов с художественными произведениями кратно числу томов с письмами, которое, в свою очередь, в три раза меньше, чем томов с публицистикой. Если число томов с художественными произведениями увеличить в два раза, то их станет на 14 больше, чем томов с письмами. Сколько томов с публицистикой содержит собрание сочинений?

Уба.7 (психологи, 1984) Найти все трехзначные числа, у которых вторая цифра вдвое меньше третьей, а сумма самого числа с числом, получающимся из него перестановкой первой и третьей цифр, делится на 10.

Уба.8 (ФНМ, 2001) Найти наименьшее нечетное натуральное число, кратное 9 и дающее остаток 7 при делении на 13.

Уба.9 (филфак, 1979) Пусть $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, где m и n — натуральные числа. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3n-m}{5n+2m}$, если известно, что она сократима?

Уба.10 (ИСАА, 2000) Найти сумму всех натуральных чисел n , для которых числа 5600 и 3024 делятся соответственно на n и $n + 5$.

Уба.11 (ВШБ, 2004) Найти все пары целых неотрицательных чисел m и n , являющихся решениями уравнения

$$2m^2 + 3m = 2nm + n + 41.$$

Уба.12 (ВМК, 1982) Имеется два проекта застройки микрорайона: по первому предполагается построить несколько одинаковых домов, содержащих в общей сложности 12096 квартир, по второму — на 8 домов больше, также одинаковых, но с большим числом квартир в каждом и содержащих в общей сложности 23625 квартир. Сколько домов предполагается построить по первому проекту?

Уба.13 (Ломоносов-2007) Натуральные числа a , b и c таковы, что наименьшее общее кратное чисел a и b равно 60, а наименьшее общее кратное чисел a и c равно 270. Найти наименьшее общее кратное чисел b и c .

Уба.14 (экономисты, 1978) Когда груз разложили в вагоны по 80 т, один вагон оказался недогружен. Когда груз переложили в вагоны по 60 т, понадобилось на 8 вагонов больше, и один вагон опять оказался недогружен. Когда же груз переложили в вагоны по 50 т, понадобилось еще на 5 вагонов больше и все вагоны оказались полными. Найти массу груза.

Уба.15 (мехмат, 2002) Найти восемнадцатый член арифметической прогрессии, если первый и одиннадцатый ее члены — натуральные числа, а сумма первых четырнадцати членов равна 77.