

ГИДРОДИНАМИКА И ПОТОК ЭНЕРГИИ

В этой главе мы исследуем с помощью законов механики сложные системы, состоящие из большого числа частиц.

§8.1. Задачи гидродинамики

Простейшие задачи гидродинамики можно решать, опираясь на закон сохранения энергии. Рассмотрим некоторые примеры.

8.1.1. Задача Торричелли о вытекании воды из отверстия. В середине XVII века Торричелли исследовал, с какой скоростью вода вытекает из отверстия в стенке сосуда. Опираясь на закон сохранения энергии, решим задачу Торричелли.

Пусть высота уровня воды над отверстием составляет H . Найдем скорость вытекающей воды v (рис. 8.1).

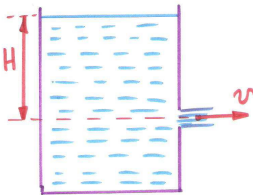


Рис. 8.1. ***

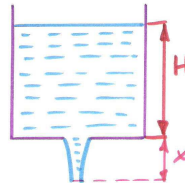


Рис. 8.2. ***

При вытекании из отверстия малой массы воды Δm потенциальная энергия воды уменьшается на $\Delta m \cdot gH$, а кинетическая — увеличивается на $\Delta m \frac{v^2}{2}$. Из закона сохранения энергии

$$\Delta m \cdot gh = \Delta m \cdot \frac{v^2}{2} \iff v = \sqrt{2gH}.$$

8.1.2. Задача Ньютона о сужении струи. В конце XVII века Ньютон рассмотрел задачу о сужении струи, вытекающей из отверстия. Найдем вслед за Ньютоном зависимость радиуса струи r от расстояния x до отверстия (рис. 8.2).

Пусть H — высота уровня воды над отверстием. Согласно формуле Торричелли, скорость воды у самого отверстия радиуса r_0 составляет $\sqrt{2gH}$, на расстоянии x от отверстия $\sqrt{2g(H+x)}$. Расход воды (в кубометрах в секунду) составляет у отверстия $\pi r_0^2 \sqrt{2gH}$, на расстоянии x — $\pi r^2 \sqrt{2g(H+x)}$. Поскольку расход постоянен,

$$\pi r_0^2 \sqrt{2gH} = \pi r^2 \sqrt{2g(H+x)} \iff r = r_0 \sqrt[4]{\frac{H}{H+x}}.$$

8.1.3. Задача Бернулли о распределении давления в трубе. В первой половине XVIII века Бернулли рассмотрел задачу о распределении давления в трубе переменного сечения (рис. 8.3).

Пусть в одной части трубы площади поперечного сечения S_1 , где жидкость плотности ρ течет со скоростью v_1 ,

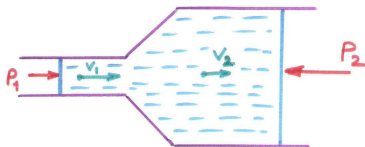


Рис. 8.3. ***

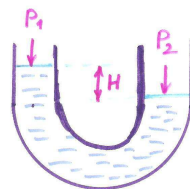


Рис. 8.4. ***

давление равно P_1 , а в другой части трубы, со скоростью движения v_2 и площадью сечения S_2 , давление равно P_2 . Найдем связь давлений P_1 и P_2 , используя закон сохранения энергии.

За промежуток времени Δt из одной части трубы в другую будет перекачана масса воды $\Delta m = \rho S_1 v_1 \Delta t = \rho S_2 v_2 \Delta t$, сила давления P_1 совершит положительную работу $P_1 S_1 v_1 \Delta t = \frac{P_1}{\rho} \Delta m$, а сила давления P_2 — отрицательную работу $-P_2 S_2 v_2 \Delta t = -\frac{P_2}{\rho} \Delta m$.

Суммарная работа

$$(P_1 - P_2) \frac{\Delta m}{\rho}$$

идет на изменение кинетической энергии перекачанной массы воды

$$\Delta m \frac{v_2^2}{2} - \Delta m \frac{v_1^2}{2}.$$

Следовательно,

$$(P_1 - P_2) \frac{\Delta m}{\rho} = \Delta m \frac{v_2^2}{2} - \Delta m \frac{v_1^2}{2} \iff P_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = P_2 + \rho \frac{v_2^2}{2}.$$

Получен закон распределения давления жидкости в трубе.

8.1.4. Задача об ускорении столба жидкости в U-образной трубке. Рассмотрим U-образную трубку постоянного сечения S , в которой движется жидкость массы m . Пусть к левому концу жидкости прикладывается давление P_1 , к правому — давление P_2 . При этом высота левого конца над правым составляет H . Требуется найти ускорение, с которым будет двигаться жидкость (рис. 8.4).

Пусть левый конец жидкости опустился на Δx . Тогда сила давления P_1 совершила положительную работу $P_1 S \Delta x$, а сила давления P_2 — отрицательную работу $-P_2 S \Delta x$. При этом масса воды $\rho S \Delta x$ "исчезла" в левой половине трубки и "появилась" в правой, на расстоянии H ниже. Поэтому потенциальная энергия жидкости уменьшилась на величину $\rho S \Delta x g H$. Работа сил давления вместе с

уменьшением потенциальной энергии пошла на изменение кинетической энергии жидкости $\Delta \left(\frac{mv^2}{2} \right) = mv\Delta v$:

$$P_1 S \Delta x - P_2 S \Delta x + \rho S \Delta x g H = mv \Delta v.$$

Поскольку $\Delta x = v \Delta t$, получим:

$$P_1 S - P_2 S + \rho S g H = m \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Тем самым найдено ускорение жидкости, движущейся в U-образной трубке.

§8.2. Понятие о плотности потока в физике

8.2.1. Плотность потока вещества. Поток вещества через поверхность. Важным понятием, которое возникло сначала в гидродинамике, а затем было перенесено на другие разделы физики, является понятие *плотности потока*. В гидродинамике вектор плотности потока вещества \vec{J} показывает, в каком направлении распространяется вещество, и какая масса вещества перетекает за единицу времени через перпендикулярную потоку единичную площадку.

Пусть вещество плотности ρ движется со скоростью v . За время Δt через перпендикулярную потоку площадку ΔS перетечет масса вещества $\rho \cdot \Delta S \cdot v \Delta t$ (рис. 8.5).

Следовательно, произведение ρv может рассматриваться как величина плотности потока вещества.

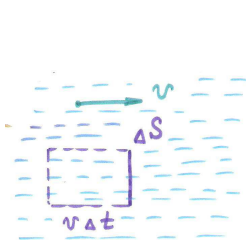


Рис. 8.5. ***

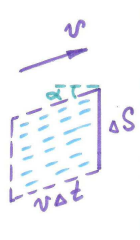


Рис. 8.6. ***

Таким образом, для вектора плотности потока вещества имеем:

$$\vec{J} = \rho \vec{v}.$$

Пусть теперь площадка ΔS расположена под некоторым углом к скорости вещества. Найдем *поток вещества* Φ через поверхность ΔS — массу вещества, перетекающего через поверхность за единицу времени.

Пусть \vec{n} — единичный вектор нормали к поверхности, α — угол между вектором скорости и вектором нормали (рис. 8.6).

Тогда за время Δt через площадку перетечет масса вещества $\rho \Delta S v \Delta t \cos \alpha$, и

$$\Delta \Phi = \rho v \Delta S \cdot \cos \alpha = J \Delta S \cos \alpha.$$

В векторном виде для потока вещества через поверхность можно записать:

$$\Delta \Phi = (\vec{J} \cdot \vec{n}) \Delta S.$$

Если поверхность является не плоской или плотность потока вещества в разных точках поверхности разная, следует разбить поверхность на большое число маленьких участков. Каждый из малых участков считается плоским, а плотность потока вещества — постоянной в пределах участка. После этого следует просуммировать потоки через малые участки. Поскольку сумма большого числа слагаемых является интегралом, выражение для общего потока Φ можно обозначить как

$$\Phi = \int (\vec{J} \cdot \vec{n}) dS.$$

8.2.2. Плотность потока вещества, испускаемого изотропным точечным источником, источником в виде длинной нити, плоскости, сферы. Представим, что имеется точечный источник, испускающий μ кг вещества за секунду *равномерно по всем направлениям*. Найдем, как

зависит плотность потока вещества J от расстояния r до источника.

Окружим источник сферой радиуса r (рис. 8.7). Поскольку нормаль к сфере всюду направлена параллельно плотности потока, поток вещества через поверхность сферы равен $JS = J \cdot 4\pi r^2$. С другой стороны, расход вещества источником равен μ , и

$$\mu = J \cdot 4\pi r^2 \iff J = \frac{\mu}{4\pi r^2}. \quad (8.1)$$

Приходим к важному утверждению: если плотность потока вещества направлена от некоторой точки и обратно пропорциональна квадрату расстояния согласно (8.1), то поток вещества через любую поверхность, содержащую данную точку, равен μ .

Найдем теперь, как зависит плотность потока вещества от расстояния до источника для некоторых протяженных источников вещества. Во всех случаях будем считать расход вещества за единицу времени равным μ .

Начнем с источника в виде длинной нити длины l .

Вблизи нити вещество распространяется по направлениям, перпендикулярным нити. Окружим нить цилиндрической поверхностью радиуса $r \ll l$ (рис. 8.8).

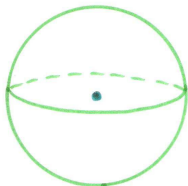


Рис. 8.7. ***

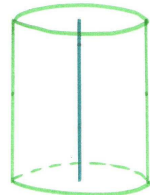


Рис. 8.8. ***

Тогда поток вещества через поверхность составит $JS = J \cdot 2\pi r l$. Приравняв его расходу вещества μ , получим:

$$J = \frac{\mu/l}{2\pi r}.$$

Пусть теперь источник имеет вид плоскости площади S .

Вблизи плоскости вещество распространяется перпендикулярно плоскости. Окружим плоскость цилиндрической поверхностью (рис. 8.9). Поток вещества через эту поверхность составляет $J \cdot 2S$; приравняв его к расходу вещества, находим:

$$J = \frac{\mu/S}{2}.$$

Пусть источник вещества равномерно распределен по сфере радиуса R . Найдём плотность потока вещества на расстоянии r от центра сферы.

Окружив источник концентрической сферой радиуса r , найдём, что плотность потока вещества через поверхность равна $J \cdot 4\pi r^2$ (рис. 8.10).

Далее следует рассмотреть два случая:

- при $r > R$ поток вещества равен μ ; отсюда $J = \frac{\mu}{2\pi r^2}$;
- при $r < R$ внутри поверхности отсутствуют источники вещества, поток вещества через поверхность равен нулю, и $J = 0$.

Последний результат можно проинтерпретировать следующим образом: внутри сферы потоки вещества от различных точек сферы компенсируются друг с другом:

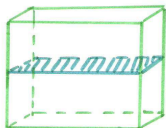


Рис. 8.9. ***

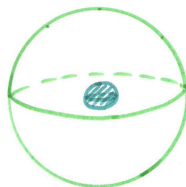


Рис. 8.10. ***

количество вещества, прошедшее через площадку в одном направлении, равно количеству вещества, прошедшему через площадку в другом направлении.

8.2.3. Плотность потока энергии и поток энергии излучения. Понятие об освещенности. Плотность потока энергии излучения точечного источника. Опыты Ламберта. Понятие потока оказывается полезным при исследовании распространения не только вещества, но и излучения. В случае излучения можно использовать понятие плотности потока энергии \vec{J}_ε — это векторная величина, направление которой совпадает с направлением распространения излучения, а величина — равна энергии, перетекающей за единицу времени через перпендикулярную к \vec{J}_ε единичную площадку. По аналогии с гидродинамикой, заключаем, что поток энергии через поверхность ΔS с нормалью \vec{n} (под углом α к потоку) равен

$$\Delta\Phi_\varepsilon = (\vec{J}_\varepsilon \cdot \vec{n})\Delta S = J_\varepsilon \Delta S \cdot \cos \alpha.$$

В качестве меры освещенности поверхности можно рассматривать энергию, переносимую через единицу площади поверхности за единицу времени, — она оказывается равной $J_\varepsilon \cos \alpha$.

Найдем, какой поток энергии J_ε создает точечный источник мощности P на расстоянии r .

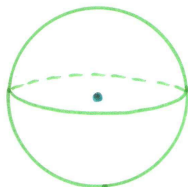


Рис. 8.11. ***

Окружим источник сферой радиуса r (рис. 8.11). Поток энергии через сферу составит $J_{\text{Э}}S = J_{\text{Э}} \cdot 4\pi r^2$; он должен совпадать с мощностью источника P . Отсюда

$$J_{\text{Э}} = \frac{P}{4\pi r^2}. \quad (8.2)$$

Эксперименты по проверке соотношения (8.2) и соотношения $J_{\text{Э}} \cos \alpha$ для освещенности были проведены Ламбертом в середине XVIII века.

В первом опыте Ламберт определял, на каком расстоянии от одной свечи r_1 надо поместить экран, чтобы получить такую же освещенность, как и на экране, расположенном на расстоянии r_2 от двух свечей. Установив, что $r_2 : r_1 = \sqrt{2}$, Ламберт подтвердил соотношение (8.2).

Во втором опыте Ламберт освещал два экрана разным количеством свечей. Поворачивая один из экранов, Ламберт добивался, чтобы освещенности экранов совпадали. Так Ламберт установил, что освещенность пропорциональна косинусу угла между направлением распространения света и нормалью к поверхности.

8.2.4. Поток напряженности электрического поля через поверхность. Теорема Гаусса, ее применение к расчету напряженности электрического поля равномерно заряженной длинной нити, плоскости, сферы. В первой половине XIX века Гаусс обратил внимание, что закон Кулона взаимодействия электрических зарядов очень похож на соотношение (8.1) для плотности потока вещества, испускаемого точечным источником: как напряженность электростатического поля точечного заряда, так и плотность потока вещества обратно пропорциональны квадрату расстояния.

Используя эту аналогию, Гаусс ввел понятие *потока напряженности электрического поля через поверхность* ΔS

(нормаль n расположена под углом α к напряженности \vec{E}):

$$\Delta\Phi_E = (\vec{E} \cdot \vec{n})\Delta S = E\Delta S \cos \alpha.$$

Учитывая, что при плотности потока вещества (8.1) поток вещества через любую поверхность, охватывающую начало координат, равен μ , Гаусс пришел к заключению, что при направленной от заряда Q напряженности электрического поля

$$E = \frac{4\pi k_{\text{эл}} Q}{4\pi r^2}$$

поток напряженности через *любую поверхность, охватывающую электрический заряд*, равен $4\pi k_{\text{эл}} Q$ (рис. 8.12):

$$\Phi_E = 4\pi k_{\text{эл}} Q. \quad (8.3)$$

Проверенное для одного заряда, соотношение (8.3) обобщается и на *любое* количество электрических зарядов, так как и напряженности полей, и потоки через поверхность, создаваемые разными зарядами складываются. Приходим к *теореме Гаусса*: поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность пропорционален заряду *внутри* этой поверхности.

Теорема Гаусса позволяет рассчитать напряженности электрического поля длинной нити, равномерно заряженных плоскости, сферы.¹⁾

¹⁾ К моменту открытия Гауссом своей теоремы эти напряженности уже были подсчитаны с помощью прямого интегрирования. Однако



Рис. 8.12. ***

Пусть заряд Q равномерно распределен вдоль длинной нити длины l . Найдем напряженность электрического поля E на расстоянии $r \ll l$ от нити.

Окружим нить цилиндром радиуса r , ось которого совпадает с нитью (рис. 8.13).

Вблизи нити напряженность электрического поля перпендикулярна нити, поэтому ее поток равен $\Phi_E = ES = E \cdot 2\pi rl$. По теореме Гаусса, он равен $4\pi k_{\text{эл}}Q$; отсюда

$$E = \frac{4\pi k_{\text{эл}}Q/l}{2\pi r}.$$

Пусть теперь заряд Q равномерно распределен вдоль плоскости площади S . Найдем напряженность электрического поля E на расстояниях h от плоскости, много меньших размеров плоскости.

Окружим плоскость цилиндром (рис. 8.14). Вблизи плоскости напряженность электрического поля перпендикулярна плоскости, поэтому ее поток равен $\Phi_E = E \cdot 2S$. По теореме Гаусса, он совпадает с $4\pi k_{\text{эл}}Q$; отсюда

$$E = \frac{4\pi k_{\text{эл}}Q}{2S} = 2\pi k_{\text{эл}}Q/S.$$

именно способ Гаусса, который красивее и проще, удобнее использовать в текстах для школьников.

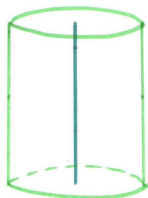


Рис. 8.13. ***

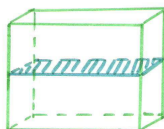


Рис. 8.14. ***

Пусть заряд Q равномерно распределен по сфере радиуса R . Найдём напряженность электрического поля E на расстоянии r от центра сферы.

Проведем концентрическую сферу радиуса r . Напряженность электрического поля, направленная вдоль радиуса, создает поток $\Phi_E = E \cdot 4\pi r^2$, который по теореме Гаусса равен $\Phi_E = 4\pi k_{\text{эл}} Q$ при $r > R$ и нулю при $r < R$. Таким образом,

$$E = \begin{cases} \frac{4\pi k_{\text{эл}} Q}{4\pi r^2} = \frac{k_{\text{эл}} Q}{r^2}, & r > R; \\ 0, & r < R. \end{cases}$$

8.2.5. Применимость закона всемирного тяготения к притяжению сферических тел. Поскольку напряженность гравитационного поля зависит от расстояния до центра тяготения по закону обратных квадратов

$$g = \frac{GM}{r^2}, \quad (8.4)$$

для гравитации справедлива теорема, аналогичная теореме Гаусса: поток напряженности гравитационного поля через замкнутую поверхность пропорционален массе, сосредоточенной внутри этой поверхности

$$\Phi_g = 4\pi GM.$$

С помощью этой теоремы можно получить выражение для напряженности гравитационного поля однородного шара или сферы и установить, что они задаются соотношением (8.4), где r — расстояние до центра шара или сферы. Следовательно, закон всемирного тяготения можно использовать для расчета силы взаимодействия не только точечных масс, но и однородных сферических тел. При этом в качестве расстояния между телами следует принять расстояние между центрами сфер.

§8.3. Молекулярно-кинетическая теория

8.3.1. Гипотеза Д.Бернулли (1738) о природе давления газа. Скорость теплового движения молекул: оценка по порядку величины, зависимость только от температуры. В первой половине XVII века работавший в Петербурге Бернулли выдвинул гипотезу о природе давления воздуха: согласно Бернулли, частицы воздуха движутся в разных направлениях, ударяются о стенки сосуда и передают стенкам свой импульс.

Бернулли оценил скорость движения молекул воздуха по порядку величины.

При движении молекул со скоростью порядка v о поверхность S за время Δt ударяется масса воздуха порядка $\rho S v \Delta t$; она передает стенке импульс порядка $\rho S v \Delta t \cdot v$. Действующая на стенку сила равна импульсу, переданному за единицу времени, — это $\rho S v^2$; поэтому давление оказывается порядка

$$P \sim \rho v^2. \quad (8.5)$$

Проведем численные оценки:

$$v \sim \frac{P}{\rho} = \sqrt{\frac{10^5 \text{ Па}}{1,3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}}} \sim 300 \text{ м/с}.$$

Также Бернулли обратил внимание, что в процессе Бойля-Мариотта (давление пропорционально плотности, температура постоянна) скорость движения молекул не меняется (P/ρ не меняется), а в процессе Амонтона (плотность постоянна, температура и давление увеличивается) скорость движения молекул возрастает (P/ρ возрастает). Так Бернулли пришел к выводу о том, что скорость движения молекул является мерой *нагретости* воздуха.

8.3.2. Расчет давления идеального газа на стенку сосуда по Джоулю (1848). Зависимость внутренней энергии идеального одноатомного газа от температуры, показатель адиабаты. Расчет давления идеального газа по

Клаузиусу (1857). В середине XIX века Джоуль исследовал вопрос о числовом коэффициенте в формуле Бернулли (8.5). Для ответа на этот вопрос Джоуль предложил достаточно искусственную модель, предположив, что молекулы движутся только вдоль координатных осей: $1/6$ молекул движутся вдоль оси x вправо, $1/6$ — вдоль оси x влево, $1/6$ — вдоль оси y в положительном направлении, $1/6$ — вдоль оси y в отрицательном направлении, $1/6$ — вдоль оси z вверх, $1/6$ — вдоль оси z вниз. Все молекулы при этом имеют одну и ту же по величине скорость v .

Рассчитаем давление газа в модели Джоуля. На перпендикулярную оси x площадку S падает за время Δt масса газа $\frac{1}{6}\rho \cdot Sv\Delta t$; поскольку частицы изменяют свою скорость на $2v$, стенке передается импульс $\frac{1}{6}\rho \cdot Sv\Delta t \cdot 2v$; действующая на стенку сила равна $\frac{1}{6}\rho \cdot Sv \cdot 2v$; для давления получаем:

$$P = \frac{1}{3}\rho v^2. \quad (8.6)$$

Основываясь на своем соотношении, Джоуль нашел кинетическую энергию поступательного движения молекул газа:

$$K = \frac{\rho V}{2}v^2 = \frac{3}{2}PV.$$

Поскольку для воздуха к тому времени было получено, что его внутренняя энергия равна $U \simeq 2,5PV$, Джоуль предположил, что эта энергия складывается из подсчитанной кинетической энергии поступательного движения $1,5PV$ и неучтенной кинетической энергии вращательного движения.

Джоуль также пресказал, что внутренняя энергия одноатомного газа должна быть равна $\frac{3}{2}PV$: молекулы одноатомного газа никакого вращательного движения совершать не могут. Это соответствует показателю адиабаты $5/3$ для одноатомных газов. Это предсказание Джоуля было подтверждено экспериментально.

Поскольку модель, в рамках которой Джоуль пришел к соотношению (8.6), не соответствовала реальности, возник вопрос об обосновании соотношения Джоуля в реалистичных предположениях о том, что молекулы движутся в случайных направлениях. Эту задачу решил Клаузиус (1857).

Рассмотрим молекулы, имеющие заданный вектор скорости \vec{v} . За время Δt с площадкой S , направленной перпендикулярно оси x , столкнутся молекулы из объема $Sv_x\Delta t$ (рис. 8.15).

Поэтому молекула со скоростью \vec{v} столкнется со стенкой с вероятностью

$$\frac{Sv_x\Delta t}{V}.$$

Если столкновение произойдет, молекула массы m_0 передаст стенке импульс $2m_0v_x$ — в среднем будет передан импульс

$$p_{0x} = 2m_0v_x \cdot \frac{Sv_x\Delta t}{V}. \quad (8.7)$$

Воспользуемся обозначением для среднего значения квадрата скорости в проекции на ось x : если имеется K частиц с x -компонентами скорости v_{x1}, v_{x2}, \dots , среднее значение составляет

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots}{K}$$

Используя обозначение для среднего, найдем сумму импульсов (8.7), переданных стенке всеми $N/2$ частицами,

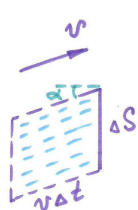


Рис. 8.15. ***

летающими к стенке (у них $v_x > 0$); общий переданный импульс составит

$$p_x = \frac{N}{2} \cdot 2m_0 \langle v_x^2 \rangle \frac{S\Delta t}{V}.$$

Отсюда получим формулу для давления:

$$P = \frac{p_x}{S\Delta t} = \frac{N}{2} \cdot 2m_0 \langle v_x^2 \rangle \frac{1}{V} = \frac{Nm_0}{V} \langle v_x^2 \rangle. \quad (8.8)$$

Выразим через средний квадрат скорости кинетическую энергию газа:

$$K = N \frac{m_0}{2} \langle v^2 \rangle = N \frac{m_0}{2} (\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle) = 3N \frac{m_0}{2} \langle v_x^2 \rangle. \quad (8.9)$$

Сравнивая соотношения (8.8) и (8.9), получаем:

$$K = \frac{3}{2} PV.$$

§8.4. ЭФФЕКТЫ ПЕРЕНОСА, МАССЫ И РАЗМЕРЫ МОЛЕКУЛ

8.4.1. Представление о потоке тепла. Теплопроводность. Оценка коэффициента теплопроводности воздуха по Клаузиусу. Если температура системы зависит от координаты, в системе наблюдается поток тепла, или поток энергии. Это явление называется *теплопроводностью*. Согласно открытому в 1820 году закону Фурье, плотность потока тепла (или внутренней энергии) по оси z пропорциональна производной от температуры по этой координате:

$$J_U^z = -\kappa \frac{dT}{dz}, \quad \kappa = \text{const}.$$

Коэффициент пропорциональности κ называется *коэффициентом теплопроводности*.

Явление теплопроводности наблюдается в газах, жидкостях, твердых телах. Процесс теплопроводности в газах всегда исследуется *при постоянном давлении газа*, так как выравнивание давления происходит гораздо быстрее, чем выравнивание температуры.

В 1860-х годах Клаузиус оценил коэффициент теплопроводности воздуха с позиций молекулярно-кинетической теории. При оценке Клаузиус использовал понятие *длины свободного пробега* молекулы — характерного расстояния, которое молекула проходит между столкновениями.

Выразим вслед за Клаузиусом коэффициент теплопроводности воздуха.

Пусть температура воздуха зависит от координаты z . Рассмотрим площадку S , расположенную перпендикулярно оси z в слое $z = z_0$. На нее снизу падают молекулы из слоя $z = z_-$ (плотность ρ_- , давление P , скорости теплового движения v_-), а сверху — молекулы из слоя $z = z_+$ (плотность ρ_+ , давление P , скорость теплового движения v_+). При этом расстояние между этими слоями порядка длины свободного пробега λ (рис. 8.16). Масса молекул, перетекающих через площадку S снизу вверх за время Δt , порядка $\rho_- v_- S \Delta t$; она переносит энергию порядка $\rho_- v_- S \Delta t \cdot \frac{v_-^2}{2} \sim P v_- S \Delta t$.

Аналогично, молекулы, перетекающие через площадку сверху вниз, переносят энергию порядка $P v_+ S \Delta t$.

Следовательно, нескомпенсированная плотность потока энергии через площадку составляет

$$J_U^z \sim P(v_- - v_+).$$

Преобразуем данное выражение:

$$J_U^z \sim -P v_+ \left(1 - \frac{v_-}{v_+}\right) = -P v_+ \frac{1 - (v_-/v_+)^2}{1 + v_-/v_+}.$$

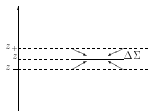


Рис. 8.16. ***

Учтем, что квадраты скоростей теплового движения в слоях относятся как температуры, а $v_-/v_+ \simeq 1$; тогда

$$J_U^z \sim -Pv_+ \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{T_-}{T_+}\right) \sim -\frac{Pv}{2T} (T_+ - T_-)$$

Учитывая, что разность температур в слоях $T_+ - T_- \simeq \frac{dT}{dz}(z_+ - z_-) \sim \frac{dT}{dz}\lambda$, получим:

$$J_U^z \sim -\frac{Pv}{2T}\lambda \frac{dT}{dz}.$$

Отбрасывая множитель $1/2$ (он порядка единицы), получаем, что по порядку величины коэффициент теплопроводности

$$\kappa \sim \frac{\lambda P v}{T}. \quad (8.10)$$

8.4.2. Представление о потоке импульса. Вязкость. Оценка коэффициента вязкости воздуха по Максвеллу (1860). Явление вязкости можно наблюдать в следующей системе. Пусть слои воздуха движутся в горизонтальном направлении оси x со скоростью V_x , зависящей от вертикальной координаты z . Температура и давление в системе предполагаются постоянными (рис. 8.17).

В такой системе будет наблюдаться поток импульса. Плотность потока горизонтального импульса вдоль вертикальной оси $J_{p_x}^z$ оказывается пропорциональна производной скорости V_x по координате z :

$$J_{p_x}^z = -\eta \frac{dV_x}{dz}.$$

Коэффициент пропорциональности η называют *коэффициентом вязкости*.

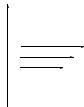


Рис. 8.17.

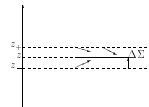


Рис. 8.18.

Следуя Максвеллу (1860), оценим коэффициент вязкости воздуха методами молекулярно-кинетической теории.

Пусть ρ — плотность вещества, v — скорость теплового движения молекул. Рассмотрим площадку S , расположенную перпендикулярно оси z в слое $z = z_0$. На нее снизу падают молекулы из слоя $z = z_-$ (горизонтальная скорость V_-), а сверху — молекулы из слоя $z = z_+$ (горизонтальная скорость V_+). Расстояние между этими слоями порядка длины свободного пробега λ (рис. 8.18).

Масса молекул, перетекающих через площадку S снизу вверх за время Δt , порядка $\rho v S \Delta t$; она переносит горизонтальный импульс порядка $\rho v S \Delta t \cdot V_-$. Аналогично, молекулы, перетекающие через площадку сверху вниз, переносят горизонтальный импульс порядка $\rho v S \Delta t \cdot V_+$. Следовательно, нескомпенсированная плотность потока импульса составит

$$J_{p_x}^z \sim \rho v (V_- - V_+) \sim -\rho v \frac{dV_x}{dz} (z_+ - z_-) \sim -\lambda \rho v \frac{dV_x}{dz}$$

Таким образом, коэффициент вязкости газа по порядку величины равен

$$\eta \sim \lambda \rho v. \quad (8.11)$$

8.4.3. Оценка длины свободного пробега в воздухе из экспериментальных данных для коэффициентов переноса. На основе экспериментальных значений коэффициентов вязкости и теплопроводности и соотношений (8.10) и (8.11) можно оценить по порядку величины длину свободного пробега.

Поскольку коэффициент теплопроводности воздуха $\kappa = 2 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$, имеем:

$$\lambda \sim \frac{\kappa T}{Pv} \sim \frac{2 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \cdot 300 \text{ К}}{10^5 \text{ Па} \cdot 300 \text{ м/с}} \sim 2 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Учитывая, что коэффициент вязкости воздуха $\eta \sim 2 \cdot 10^{-5}$ Па·с, получим:

$$\lambda \sim \frac{\eta}{\rho v} \sim \frac{2 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}}{1,3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 300 \text{ м/с}} \simeq 0,5 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Тот факт, что длины свободного пробега, оцененные из коэффициентов вязкости и теплопроводности, совпали по порядку величины, является важным доводом в пользу молекулярно-кинетической теории. В то же время, отличие примерно в 4 раза говорит о том, что данный метод расчета коэффициентов переноса позволяет получить лишь оценки по порядку величины.

8.4.4. Связь длины свободного пробега, концентрации и размеров частиц. Оценка массы и размера молекул по Лошмидту (1865). Используя данные по длине свободного пробега, Лошмидт (1865) оценил массу m и размер a молекулы по порядку величины.

Для расчета двух неизвестных необходимы два уравнения. Первое из соотношений, связывающее m и a с длиной свободного пробега λ и плотностью газа ρ_{Γ} , было получено Клаузиусом (1858).

Пройдя расстояние λ , молекула заметает объем порядка λa^2 . Она испытывает при этом одно столкновение — в этот объем попадает одна молекула массой m (рис. 8.19). Поэтому плотность газа составляет

$$\rho_{\Gamma} \sim \frac{m}{\lambda a^2}. \quad (8.12)$$

Второе уравнение Лошмидт записал на основе следующих соображений: если вещество сконденсировать в жидкое



Рис. 8.19. ***

состояние, молекулы окажутся прижаты плотно друг к другу — плотность вещества станет порядка

$$\rho_{\text{ж}} \sim \frac{m}{a^3}. \quad (8.13)$$

Используя соотношения (8.12) и (8.13), можно оценить m и a . Разделив одно из соотношений на другое, найдем:

$$\frac{a}{\lambda} \sim \frac{\rho_{\text{г}}}{\rho_{\text{ж}}}.$$

Учитывая, что плотности газов при нормальных условиях порядка 1 кг/м^3 , а плотности жидкостей — порядка 10^3 кг/м^3 , получаем, что размер молекулы примерно в 1000 раз меньше длины свободного пробега — он составляет примерно 10^{-10} м. Масса молекулы оказывается порядка 10^{-27} кг — это соответствует числу Авогадро (числу молекул в одном моле — грамме атомарного водорода) порядка 10^{24} .

Метод Лошмидта впервые позволил оценить массы и размеры молекул, а также постоянную Авогадро по порядку величины. Принципиальный и неустранимый недостаток метода заключался в том, что, оперируя полукачественными понятиями длины свободного пробега, он позволял получать лишь оценки по порядку величины, а не сколько-нибудь точные значения.

Второй метод измерения постоянной Авогадро был предложен в знаменитой работе Планка (1900). Сравнивая с экспериментом свою знаменитую формулу для распределения энергии теплового излучения по частотам, Планк определил значение не только новой постоянной Планка, но и постоянной Авогадро — именно так и были получены значения масс молекул.

