Глава 7

ДИНАМИКА

§7.1. Закон сохранения механической энергии и его применения

Законы движения тел под действием внешних сил могут быть получены в ряде случаев на основе закона сохранения механической энергии, являющегося дальнейшим развитием принципа невозможности вечных двигателей. Сначала мы приведем доводы в пользу закона сохранения механической энергии, затем — исследуем применения закона к задачам о движении тел.

7.1.1. Возможность взаимного превращения потенциальной энергии в кинетическую и наоборот (свободное падение, удар об абсолютно упругую стенку). Закон невозрастания механической энергии — следствие невозможности вечных двигателей. При исследовании свободного падения тел по вертикали мы показали, что потенциальная энергия покоящегося тела переходит в кинетическую энергию *движущегося по вертикали* тела и наоборот.

Пусть теперь тело движется в другом направлении. Как полностью перевести его кинетическую энергию в потенциальную? Можно использовать удар об абсолютно упругую стенку, при котором направление движения тела изменяется, а величина скорости остается неизменной (рис. 7.1).

Если после такого удара тело начнет двигаться вертикально вверх, его кинетическая энергия через некоторое время полностью перейдет в потенциальную: тело остановится, поднявшись на некоторую высоту.

Таким образом, следствием невозможности вечных двигателей в статике является закон *невозрастания механической энергии* в динамике. Действительно, если бы в некотором процессе механическая энергия системы возрастала, можно было бы использовать этот процесс для конструирования вечного двигателя.

7.1.2. Периодические движения по гладкой горке в поле тяжести (опыты Галилея); периодические колебания груза, подвешенного к линейной или нелинейной пружине. Сохранение механической энергии при таком движении. В конце XVI века Галилей наблюдал *периодические* движения тележки по гладкой горке в поле тяжести [1] (рис. 7.2).

При таком периодическом движении через один и тот же промежуток времени система возвращается в прежнее состояние — ее механическая энергия не убывает, а остается неизменной.

Аналогично можно наблюдать периодические колебания груза, прикрепленного к линейной или нелинейной пружине. При таком движении механическая энергия системы также

[1] Галилей также наблюдал и движения маятников

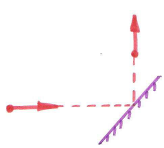

Рис. 7.1. ***

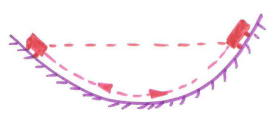

Рис. 7.2. ***

сохраняется: если предположить, что на каком-то этапе она возрастала, на каком-то этапе она должна была бы убывать — был бы сконструирован вечный двигатель.

7.1.3. Зависимость скорости тела, соскальзывающего с горки, от высоты. Ускорение при движении тела по наклонной плоскости. Пропорциональность ускорения и силы. Ускорение системы из двух грузов и блока в поле тяжести. Пусть тело соскальзывает с наклонной плоскости длины l и высоты $h = l\sin\alpha$ без начальной скорости (рис. 7.3).

К концу пути потенциальная энергия тела уменьшится на mgh; однако тело разгонится до скорости v — его кинетическая энергия увеличится на $\frac{mv^2}{2}$. Считая механическую энергию постоянной при таком движении, получаем:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl\sin\alpha}\,.$$

Учитывая, что при движении с ускорением a из состояния покоя скорость тела v зависит от пройденного пути l как $\sqrt{2al}$, находим, что тело, соскальзывающее с наклонной плоскости, движется с ускорением

$$a = g\sin\alpha.$$

Используя полученный результат, Галилей заключил, что ускорение тела при движении по наклонной плоскости пропорционально приложенной силе: проекция силы тяжести на наклонную плоскость, как и ускорение, пропорционально $\sin\alpha$.

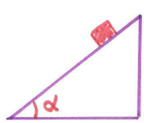

Рис. 7.3. ***

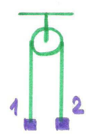

Рис. 7.4. ***

На основе закона сохранения энергии можно находить ускорения и в более сложных системах. В качестве примера рассмотрим систему из двух грузов с массами m_1 и m_2 ($m_2 > m_1$) и неподвижного блока (рис. 7.4).

Пусть эту систему отпустили без начальной скорости.

Пусть первый груз поднялся на расстояние h; тогда второй груз опустился на это же расстояние; потенциальная энергия системы двух грузов уменьшилась на $m_2gh - m_1gh$. При разгоне до скорости v кинетическая энергия грузов увеличилась на $(m_1 + m_2)\frac{v^2}{2}$. Записывая закон сохранения энергии, получим:

$$m_2gh - m_1gh = (m_1 + m_2)\frac{v^2}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad v = \sqrt{2\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}gh}$$

Сравнивая полученное соотношение с выражением для скорости при движении с ускорением a в зависимости от пройденного пути h ($v = \sqrt{2ah}$), получим выражение для ускорения грузов:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}g.$$

7.1.4. Ускорение тела, прикрепленного к линейной или нелинейной пружине. Гармонические колебания пружинного маятника. Рассчитаем, с каким ускорением движется тело, прикрепленное к пружине с известной зависимостью ее потенциальной энергии $W(x)$ от растяжения x. Считая движение периодическим, запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} + W(x) = \text{const}.$$

За промежуток времени dt изменение кинетической энергии тела составляет

$$dK = d(\frac{m}{2}v^2) = \frac{m}{2}dv^2 = mv \cdot dv = mvadt.$$

Изменение потенциальной энергии равно

$$dW = \frac{dW}{dx}dx = \frac{dW}{dx}v \cdot dt.$$

Учитывая, что $dK + dW = 0$, находим:

$$ma + \frac{dW}{dx} = 0 \iff ma = -\frac{dW}{dx} = F. \qquad (7.1)$$

Покажем, что подвешенный на линейной пружине ($F = -kx$, $W(x) = \frac{kx^2}{2}$) груз массы m совершает гармонические колебания

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (7.2)$$

В этом можно убедиться двумя способами:

- рассчитать кинетическую энергию груза в зависимости от его координаты и найти, какой должна быть зависимость $W(x)$, чтобы выполнялся закон сохранения энергии, — окажется, что $W = kx^2/2$;
- рассчитать ускорение груза в зависимости от его координаты и найти зависимость от координаты возвращающей силы из соотношения $ma = F$ — окажется, что $F = -kx$.

Рассмотрим сначала первый способ.

Поскольку скорость груза $v_x = \frac{dx}{dt}$ оказывается равной

$$v_x = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0),$$

для кинетической энергии получим:

$$\frac{mv_x^2}{2} = \frac{m\omega^2}{2}(A^2 - x^2),$$

или

$$\frac{mv_x^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \mathrm{const}.$$

Таким образом, чтобы тело совершало гармонические колебания по закону (7.2), потенциальная энергия тела должна зависеть от координаты x по закону

$$W(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

Эта зависимость соответствует линейной пружине с коэффициентом упругости

$$k = m\omega^2 \iff \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad (7.3)$$

Рассмотрим теперь второй способ.

Рассчитаем ускорение $a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$:

$$a_x = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x.$$

Следовательно, возвращающая сила, действующая на тело, равна $F = ma = -m\omega^2 x$, что соответствует линейной пружине с коэффициентом упругости (7.3).

7.1.5. Кинетическая энергия плоской фигуры, вращающейся вокруг неподвижной оси. Момент инерции. Угловое ускорение плоской фигуры, его связь с моментом силы и моментом инерции. Гармонические колебания математического маятника. Исследуем превращения энергии в системе, совершающей вращательное движение. Пусть к плоской фигуре, вращающейся относительно оси O, прикреплены точечные грузы: груз массы m_1 — на расстоянии r_1 от оси, груз массы m_2 — на расстоянии r_2 от оси и т.д. (рис. 7.5)

При вращении фигуры с угловой скоростью Ω скорости грузов составляют Ωr_1, Ωr_2, ..., а кинетическая энергия фигуры оказывается равной

$$K = \frac{m_1(\Omega r_1)^2}{2} + \frac{m_2(\Omega r_2)^2}{2} + \ldots$$

и пропорциональной квадрату угловой скорости:

$$K = \frac{1}{2} J \Omega^2.$$

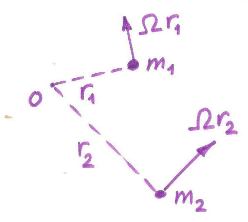

Рис. 7.5. ***

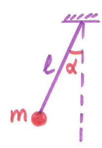

Рис. 7.6. ***

Коэффициент пропорциональности

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots$$

называется *моментом инерции* плоской фигуры.

Пусть на плоскую фигуру с моментом инерции J действуют внешние силы, а потери энергии отсутствуют. Изменение потенциальной энергии W фигуры вместе с окружающими телами при повороте фигуры на $d\varphi = \Omega dt$ выражается через момент M сил, приложенных к фигуре:

$$dW = -M \cdot d\varphi = -M\Omega \cdot dt.$$

Изменение кинетической энергии составит

$$dK = d(\frac{J\Omega^2}{2}) = J\Omega d\Omega.$$

Учитывая, что изменение кинетической энергии должно компенсироваться изменением потенциальной энергии, получим:

$$dK + dW = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad J\Omega d\Omega - M\Omega dt = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad J\frac{d\Omega}{dt} = M. \tag{7.4}$$

Получено уравнение динамики вращательного движения.

В качестве примера рассмотрим движение математического маятника — подвешенного на нити длины l груза массой m, совершающего *малые* колебания (рис. 7.6).

Пусть α — угол отклонения нити от вертикали. Оказывается, что при малых α колебания маятника можно *приближенно* считать гармоническими:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Убедиться в этом можно двумя способами: на основе закона сохранения энергии и на основе уравнения (7.1).

Исследуем сначала превращения энергии.

Зависимость угловой скорости груза $\Omega = \frac{d\alpha}{dt}$ от времени оказывается следующей:

$$\Omega = -\alpha_0 \omega \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Поскольку груз движется со скоростью Ωl, кинетическая энергия груза зависит от α как

$$K = m\frac{(\Omega l)^2}{2} = \frac{ml^2}{2}\omega^2(\alpha_0^2 - \alpha^2);$$

следовательно, зависимость потенциальной энергии груза от α должна быть следующей:

$$W(\alpha) = ml^2\omega^2\frac{\alpha^2}{2}.$$

С другой стороны, при отклонении груза на угол α он поднимается на высоту

$$h = l - l\cos\alpha = l \cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Считая, что при малых α синус угла приближенно равен радианной мере угла, находим:

$$h \simeq l\frac{\alpha^2}{2}.$$

Таким образом, потенциальная энергия груза при отклонении на малый угол выражается из соотношения:

$$W(\alpha) \simeq mg \cdot l\frac{\alpha^2}{2}.$$

Сравнивая два соотношения для потенциальной энергии, находим:

$$mgl = ml^2\omega^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\,.$$

Второй способ основан на использовании уравнения (7.4).

Рассчитаем угловое ускорение груза:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\alpha_0\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2\alpha.$$

Следовательно, момент сил, действсвующий на груз, должен быть равен

$$M = J\frac{d\Omega}{dt} = -J\omega^2\alpha = -ml^2\omega^2\alpha.$$

С другой стороны, плечо силы тяжести, равное $l\sin\alpha$, при малых углах α приближенно равно $l\alpha$ — момент силы оказывается равен

$$M = mgl\alpha.$$

Сравнивая два соотношения для момента, находим:

$$mgl = ml^2\omega^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\,.$$

§7.2. Законы сохранения и принцип относительности. Сохранение импульса. Реактивное движение

7.2.1. Скорость центра масс и импульс системы тел. Скорость, с которой движется центр масс системы тел, связана с важной характеристикой системы — ее импульсом.

Запишем выражение для x-координаты центра масс системы точечных масс m_1, m_2, ..., находящихся в точках с координатами x_1, x_2, ...:

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + ...}{M}, \qquad M = m_1 + m_2 + ...$$

Тогда приращение координаты центра масс равно

$$dx_c = \frac{m_1\cdot dx_1 + m_2\cdot dx_2 + ...}{M}.$$

Вводя обозначения для скоростей тел $v_{1x} = \dfrac{dx_1}{dt}$, $v_{x2} = \dfrac{dx_2}{dt}$, ... и центра масс системы $v_{cx} = \dfrac{dx_c}{dt}$, получим

$$v_{cx} = \frac{m_1v_{1x} + m_2v_{2x} + ...}{M}.$$

Обозначая числитель дроби как *импульс* системы:

$$p_x = m_1v_{1x} + m_2v_{2x} + ...,$$

получим:

$$v_{cx} = \frac{p_x}{M}.$$

Поскольку аналогичные соотношения можно записать и для компонент по осям y и z, для векторов импульса системы $\overrightarrow{p}$, скорости центра масс $\overrightarrow{v}_c$ и скоростей тел $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$, ... получим:

$$\overrightarrow{v}_c = \frac{\overrightarrow{p}}{M}, \qquad \overrightarrow{p} = m_1\overrightarrow{v}_1 + m_2\overrightarrow{v}_2 + \ldots$$

7.2.2. Преобразование кинетической энергии и импульса при переходе в другую систему отсчета. Кинетическая энергия обруча; задача о скатывании обруча с наклонной плоскости. Пусть имеются два наблюдателя, один из которых неподвижен, а другой — движется относительного него со скоростью $\overrightarrow{V}$. Кинетическая энергия и импульс системы массы M с точки зрения первого наблюдателя равны K_0, $\overrightarrow{p}_0$; с точки зрения второго наблюдателя — равны K, $\overrightarrow{p}$. Исследуем, как связаны кинетические энергии и импульсы, измеренные этими наблюдателями.

Рассмотрим сначала случай, когда наблюдатели исследуют систему из одного тела массой m_1, которое движется со скоростью $\overrightarrow{v}_1$ относительно второго наблюдателя и $\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{V}$ относительно первого. С точки зрения первого наблюдателя кинетическая энергия и импульс окажутся равны

$$K_0 = \frac{m_1(\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{V})^2}{2} = \frac{m_1\overrightarrow{v}_1^2}{2} + m_1(\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{V}) + \frac{m_1\overrightarrow{V}^2}{2} =$$

$$= K + (\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{V}) + \frac{m_1\overrightarrow{V}^2}{2};$$

$$\overrightarrow{p}_0 = m_1(\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{V}) = \overrightarrow{p} + m_1\overrightarrow{V}.$$

Для системы из нескольких тел полученные соотношения сохранят свой вид:

$$K_0 = K + (\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{V}) + \frac{M\overrightarrow{V}^2}{2}; \qquad \overrightarrow{p}_0 = \overrightarrow{p} + M\overrightarrow{V}. \tag{7.5}$$

Операцию перехода из одной системы отсчета в другую удобно применять для расчета кинетической энергии катящегося по поверхности обруча (рис. 7.7).

Пусть центр обруча движется со скоростью V. С точки зрения наблюдателя, сидящего на этом центре, обруч совершает только вращательное движение со скоростью V; поэтому его кинетическая энергия равна $MV^2/2$, а импульс равен нулю. С точки зрения неподвижного наблюдателя согласно (7.5) получим: $K_0 = \frac{MV^2}{2} + \frac{MV^2}{2} = MV^2$.

При скатывании обруча с наклонной плоскости высоты h (угол α с горизонтом) потенциальная энергия обруча Mgh расходуется на кинетическую энергию не только поступательного движения $MV^2/2$, но и вращательного движения $MV^2/2$ — в сумме MV^2. Поэтому скорость обруча равна $V = \sqrt{gh}$ (а не $\sqrt{2gh}$) — ускорение равно $\frac{g}{2}\sin\alpha$ (вместо $g\sin\alpha$).

7.2.3. Сохранение импульса при ударе как следствие принципов относительности и невозможности вечных двигателей (рассуждение Гюйгенса). В середине XVII века Гюйгенс на основе принципа невозможности вечных двигателей и принципа относительности — независимости законов механики от выбора системы отсчета. На обложке к своей работе Гюйгенс привел следующую иллюстрацию:

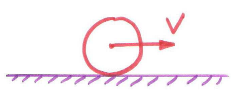

Рис. 7.7. ***

исследователь, сидя в лодке, проводит опыт по столкновению шариков — а лодка движется с постоянной скоростью.

Идея Гюйгенса заключалась в том, что с точки зрения неподвижного наблюдателя на берегу конечная кинетическая энергия не может быть больше начальной:

$$K_0^{\text{конеч}} \leqslant K_0^{\text{нач}}. \tag{7.6}$$

Выразим начальную и конечную кинетическую энергию с точки зрения неподвижного наблюдателя через кинетическую энергию и импульс с точки зрения наблюдателя в лодке, движущейся со скоростью $\overrightarrow{V}$. Согласно (7.5),

$$K_0^{\text{нач}} = K^{\text{нач}} + (\overrightarrow{p}^{\text{нач}} \cdot \overrightarrow{V}) + \frac{M\overrightarrow{V}^2}{2};$$

$$K_0^{\text{конеч}} = K^{\text{конеч}} + (\overrightarrow{p}^{\text{конеч}} \cdot \overrightarrow{V}) + \frac{M\overrightarrow{V}^2}{2}.$$

Следовательно, неравенство (7.6) принимает вид:

$$K^{\text{конеч}} + (\overrightarrow{p}^{\text{конеч}} \cdot \overrightarrow{V}) \leqslant K^{\text{нач}} + (\overrightarrow{p}^{\text{нач}} \cdot \overrightarrow{V}),$$

или

$$((\overrightarrow{p}^{\text{конеч}} - \overrightarrow{p}^{\text{нач}}) \cdot \overrightarrow{V}) \leqslant K^{\text{нач}} - K^{\text{конеч}}. \tag{7.7}$$

Пусть теперь закон сохранения импульса нарушается: $\overrightarrow{p}^{\text{конеч}} \neq \overrightarrow{p}^{\text{нач}}$. Тогда можно подобрать такую скорость $\overrightarrow{V}$, что неравенство (7.7) нарушится (для этого скорость $\overrightarrow{V}$ должна быть направлена вдоль вектора $\overrightarrow{p}^{\text{конеч}} - \overrightarrow{p}^{\text{нач}}$ и достаточно большой). Тогда, запустив лодку с нужной скоростью и проведя в ней эксперимент с нарушением закона сохранения импульса, можно построить вечный двигатель: конечная энергия относительно берега превысит начальную.

Таким образом, невозможность вечных двигателей в совокупности с принципом относительности приводит к закону сохранения импульса.

7.2.4. Абсолютно неупругий удар (расчет конечой скорости). Закон сохранения импульса применяется обычно для исследования соударений тел. Простейший пример — *абсолютно неупругий удар*, после которого столкнувшиеся тела движутся вместе с одной скоростью $\vec{v}$. Эту конечную скорость можно рассчитать из закона сохранения импульса.

Пусть m_1 и m_2 — массы тел, $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ — их начальные скорости. Тогда начальный импульс системы тел $\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ совпадает с конечным $(m_1 + m_2)\vec{v}$:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

7.2.5. Абсолютно упругий (центральный и нецентральный) удар, его исследование в системе отсчета, связанной с центром масс. Более сложным примером столкновения тел является *абсолютно упругий удар* — процесс, в котором выполняется не только закон сохранения импульса, но и закон сохранения энергии. При исследовании абсолютно упругого удара удобно переходить в систему отсчета, связанную с центром масс системы — в ней как начальный, так и конечный импульс системы обращаются в нуль.

При *центральном* ударе два тела с массами m_1 и m_2 летят навстречу друг другу с противоположно направленными импульсами p; после удара тела летят с теми же импульсами, но в противоположном направлении (рис. 7.8).

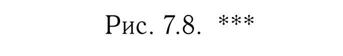

Рис. 7.8. ***

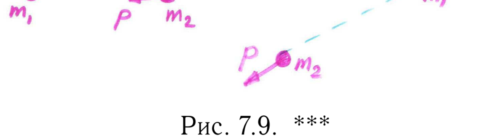

Рис. 7.9. ***

При *нецентральном* ударе тела разлетаются с теми же по величине импульсами, но под некоторым углом к первоначальному направлению движения (рис. 7.9).

7.2.6. Реактивное движение. Уравнение Мещерского. Задача Циолковского о ракете. Используя закон сохранения импульса, исследуем движение ракеты. Пусть ракета массой M испускает продукты сгорания массой ΔM со скоростью u (рис. 7.10).

Тогда ракета приобретает скорость Δv, которую можно рассчитать из закона сохранения импульса:

$$\Delta M \cdot u = M \cdot \Delta v \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta v = \frac{\Delta M}{M} u.$$

Получено уравнение Мещерского.

Используя это уравнение, решим задачу Циолковского о ракете: требуется определить до какой скорости разгонится ракета, начальная масса которой с топливом составляет M_1, а конечная M_2.

Изобразим график зависимости $\frac{u}{M}$ от M. Тогда изменение скорости ракеты при изменении ее массы на ΔM совпадает с площадью маленького прямоугольника длиной ΔM и шириной u/M (рис. 7.11).

Следовательно, общее изменение скорости ракеты совпадает с площадью фигуры, ограниченной графиком

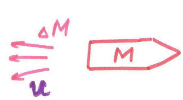

Рис. 7.10. ***

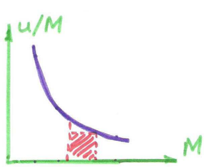

Рис. 7.11. ***

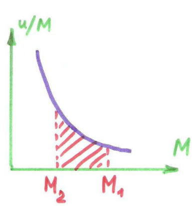

Рис. 7.12. ***

функции, прямыми $M = M_1$ и $M = M_2$ и осью абсцисс (рис. 7.12).

Отсюда

$$v = \int_{M_2}^{M_1} \frac{u}{M} dM = u \ln \frac{M_1}{M_2}.$$

Таким образом, конечная скорость ракеты пропорциональна скорости истечения продуктов сгорания и логарифмически зависит от отношения начальной массы ракеты к конечной.

§7.3. Законы Ньютона как дальнейшее развитие законов сохранения

7.3.1. Законы Ньютона как обобщение законов сохранения. Опираясь на известные законы сохранения и обобщая их, Ньютон в конце XVII века сформулировал три закона механики.

Первый и второй законы Ньютона являются обобщениями результатов Галилея по соскальзыванию тел с наклонной плоскости.

При малых углах наклона, когда наклонную плоскость можно считать горизонтальной, ускорение тела обращается в нуль — движение тела по горизонтальной поверхности равномерно. Первый закон Ньютона заключался в том, что тело сохраняет состояние покоя или прямолинейного равномерного движения, пока на него не действуют другие тела или действие других тел скомпенсировано.

В дальнейшем, когда было введено понятие о системе отсчета, выяснилось, что первый закон Ньютона справедлив только в инерциальных системах отсчета. Например, с точки зрения наблюдателя на вращающемся диске тела, на которые не действуют другие тела, движутся отнюдь не прямолинейно. Поэтому утверждение первого закона Ньютона стали рассматривать в качестве определения инерциальной системы отсчета, а сам первый закон — формулировать в виде "существуют инерциальные системы отсчета".

Второй закон Ньютона является обобщением утверждения Галилея о том, что ускорение тела пропорционально действующей на него силе и обратно пропорционально массе (Галилей проверял это утверждение для тел, соскальзывающих с наклонной плоскости). Обобщение Ньютона заключается в том, что второй закон сформулирован для тел, движущихся не только по прямой, как у Галилея, но и по плоскости или в пространстве — поэтому закон следует записывать для *векторов* ускорения тела $\overrightarrow{a}$ и действующей на тело силы $\overrightarrow{F}$:

$$\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{F}}{m}. \tag{7.8}$$

Соотношение (7.8) обобщает уравнение динамики движения по прямой (7.1) и известные законы свободного падения тел.

Сам Ньютон записывал второй закон в виде соотношения для импульса тела: изменение импульса тела $d\overrightarrow{p}$ равно импульсу силы $\overrightarrow{F}dt$:

$$d\overrightarrow{p} = \overrightarrow{F}dt. \tag{7.9}$$

Чтобы для системы тел выполнялся открытый Гюйгенсом закон сохранения импульса, Ньютон сформулировал свой третий закон, согласно которому сила $\overrightarrow{F}_{21}$, с которой тело 1 действует на тело 2, должна быть равна по модулю и противоположна по знаку силе $\overrightarrow{F}_{12}$, с которой тело 2 действует на тело 1.

Действительно, рассмотрим систему этих двух тел. Изменение импульса первого тела равно $\overrightarrow{F}_{12}dt$, изменение импульса второго тела — равно $\overrightarrow{F}_{21}dt$. Общее изменения импульса оказывается равным $(\overrightarrow{F}_{12} + \overrightarrow{F}_{21})dt$. Чтобы импульс системы сохранялся, должно выполняться соотношение

$$\overrightarrow{F}_{12} + \overrightarrow{F}_{21} = 0,$$

являющееся третьим законом Ньютона.

7.3.2. Закон изменения импульса системы тел. Условие применимости закона сохранения импульса. Движение центра масс системы. Используя законы Ньютона, можно не только подтвердить законы сохранения энергии и импульса для изолированных систем, но и обсудить их возможные обобщения на неизолированные системы.

Закон изменения импульса системы тел сразу же вытекает из второго закона Ньютона в форме (7.9):

$$d\overrightarrow{p} = \overrightarrow{F}dt.$$

Здесь $\overrightarrow{p}$ — импульс *системы* тел, складывающийся из импульсов отдельных тел, а $\overrightarrow{F}$ — *векторная сумма* всех сил, действующих на *все* тела системы.

Учтем, что силы, действующие на тела системы, делятся на внешние (со стороны тел не из системы) и внутренние (со стороны тел системы). Но по третьему закону Ньютона сумма всех внутренних сил, действующих на тела системы, равна нулю. Следовательно, на изменение импульса системы влияют только внешние силы:

$$d\overrightarrow{p} = \overrightarrow{F}^{\text{внешн}}dt. \tag{7.10}$$

Изменение импульса системы за единицу времени равно сумме всех внешних сил $\overrightarrow{F}^{\text{внешн}}$, действующих на тела системы.

Закон изменения импульса (7.10) позволяет установить, в каких ситуациях выполняется свойство сохранения импульса:

- на тела системы не действуют другие внешние тела;
- действие других тел на тела системы скомпенсировано;

- длительность процесса dt столь мала, что внешние силы не успевают изменить импульс системы [1]);
- внешние силы компенсируются только вдоль оси x — в этом случае закон сохранения импульса можно применять именно в проекции на ось x.

Соотношению (7.10) можно придать вид уравнения движения центра масс. Действительно, поскольку импульс системы выражается через ее массу M и скорость центра масс $\overrightarrow{v}_c$ как $\overrightarrow{p} = M\overrightarrow{v}_c$, для его изменения имеем: $d\overrightarrow{p} = Md\overrightarrow{v}_c = M\overrightarrow{a}_c dt$; отсюда

$$M\overrightarrow{a}_c = \overrightarrow{F}^{\text{внешн}}.$$

7.3.3. Закон изменения кинетической энергии системы тел. Законы сохранения механической энергии консервативной системы и изменения механической энергии неконсервативной системы. Исследуем, по какому закону изменяется кинетическая энергия точечного тела, на которое действует сила $\overrightarrow{F}$.

Пусть m — масса тела, $\overrightarrow{v}$ — его скорость. Изменение кинетической энергии тела равно

$$dK = d\left(\frac{m\overrightarrow{v}^2}{2}\right) = m(\overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{v}) = m(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{a}dt) = (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v})dt.$$

Учитывая, что перемещение тела за промежуток времени dt составляет $d\overrightarrow{r} = \overrightarrow{v}dt$, находим, что изменение кинетической энергии тела равно работе силы на перемещении:

$$dK = (\overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}) = \delta A.$$

Таким образом, изменение кинетической энергии системы тел при переходе из начального состояния в конечное равно работе всех сил, приложенных к телам системы:

$$K^{\text{конечн}} - K^{\text{нач}} = A_{\text{нач}\to\text{конечн}}. \tag{7.11}$$

[1]) встречающийся в задачах процесс малой длительности — удар

В случае, если система тел является консервативной, можно ввести понятие потенциальной энергии таким образом, чтобы ее изменение было равно взятой с обратным знаком суммарной работе сил, приложенных к телам системы:

$$W^{\text{конечн}} - W^{\text{нач}} = -A_{\text{нач}\to\text{конечн}}.$$

В этом случае закон изменения кинетической энергии (7.11) переходит в закон сохранения механической энергии

$$K^{\text{конечн}} + W^{\text{конечн}} = K^{\text{нач}} + W^{\text{нач}}.$$

Для неконсервативных систем действующие на тела силы делятся на две категории: консервативные и неконсервативные. Работа консервативных сил равна взятому с обратным знаком изменению потенциальной энергии:

$$-(W^{\text{конечн}} - W^{\text{нач}}) = A^{\text{конс}}_{\text{нач}\to\text{конечн}}.$$

Тогда изменение механической энергии системы оказывается равно работе неконсервативных сил:

$$(K^{\text{конечн}} + W^{\text{конечн}}) - (K^{\text{нач}} + W^{\text{нач}}) = A^{\text{неконс}}_{\text{нач}\to\text{конечн}}.$$

7.3.4. Закон изменения кинетической энергии вращательного движения плоской фигуры. Уравнение вращательного движения. Во многих задачах динамики встречаются плоские фигуры массы M, движение которых складываются из поступательного движения центра масс (скорость $\vec{v}_c$) и вращения вокруг центра масс.

Исследуем движение фигуры с помощью перехода в систему отсчета, связанную с центром масс. В новой системе отсчета импульс фигуры равен нулю, кинетическая энергия обусловлена только вращательным движением — обозначим ее как $K_{\text{вращ}}$. Согласно соотношению (7.5), с точки зрения неподвижного наблюдателя кинетическая энергия равна

$$\frac{M\vec{v}_c^{\,2}}{2} + K_{\text{вращ}}.$$

Следовательно,

$$K_{\text{вращ}} = K - \frac{M\overrightarrow{v}_c^2}{2}.$$

Получим соотношение для изменения кинетической энергии вращательного движения.

Изменение полной кинетической энергии равно $dK = \delta A$ работе сил, приложенных к системе. Изменение энергии, связанной с поступательным движением, оказывается равным

$$d\left(\frac{M\overrightarrow{v}_c^2}{2}\right) = M(\overrightarrow{v}_c \cdot d\overrightarrow{v}_c) = (\overrightarrow{v}_c \cdot \overrightarrow{F}dt) = (\overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}_c).$$

Таким образом,

$$dK_{\text{вращ}} = \delta A - (\overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}_c) \tag{7.12}$$

Изучим смысл правой части соотношения (7.12) для случая, когда на тело действует сила $\overrightarrow{F}_1$ в точке с радиус-вектором $\overrightarrow{r}_1$. В этом случае изменение кинетической энергии тела равно скалярному произведению

$$(\overrightarrow{F}_1 \cdot (d\overrightarrow{r}_1 - d\overrightarrow{r}_c))$$

силы на перемещение *относительно центра масс*. Таким образом, изменение кинетической энергии вращательного движения плоской фигуры равно работе сил, приложенных к фигуре, с точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с центром масс фигуры.

Следовательно, уравнение динамики вращательного движения (7.4), полученное из закона изменения кинетической энергии вращательного движения, можно применять и при наличии поступательного движения, но только в случае, когда вращательное движение рассматривается *относительно центра масс.* [1])

[1]) Например, если в задаче динамики плоская фигура не вращается, правило моментов можно записывать только относительно центра масс.

§7.4. Всемирное тяготение

7.4.1. Законы Кеплера. Третий закон Кеплера — опытный факт, приведший к открытию закона всемирного тяготения. Измерение гравитационной постоянной в опыте Кавендиша. В начале XVII века Кеплер, наблюдая за планетами, открыл три закона их движения вокруг Солнца, которые в дальнейшем позволили Ньютону исследовать свойства сил тяготения.

Если *приближенно* считать орбиты планет круговыми, то третий закон Кеплера гласит, что квадраты периодов обращения планет относятся, как кубы радиусов их орбит [1] — угловая скорость планеты Ω пропорциональна радиусу орбиты в степени -3/2:

$$\Omega \sim R^{-3/2}.$$

Это означает, что центростремительное ускорение планеты, равное $a = \Omega^2 R$, обратно пропорционально квадрату расстояния до Солнца:

$$a \sim R^{-2}.$$

В соответствии со вторым законом Ньютона, ускорение планеты вызывается действующей на нее силой и пропорциональна ей. Следовательно, сила взаимодействия планеты и Солнца обратно пропорциональна квадрату расстояния от планеты до Солнца. Эту силу Ньютон отождествил со *всемирным тяготением*, предположив, что именно это взаимодействие приводит к свободному падению тел у поверхности Земли. [2]

---

[1] Вот формулировка законов Кеплера: (1) планета движется вокруг Солнца по эллипсу, в одном из фокусов которых находится Солнце; (2) радиус, соединяющий Солнце и планету, описывает в равные промежутки времени равные площади; (3) квадраты периодов обращения планет относятся, как кубы больших полуосей их орбит

[2] Важный довод Ньютона в пользу "всемирного"характера закона тяготения — справедливость третьего закона Кеплера не только для

Поскольку сила тяжести, действующая на тела вблизи Земли, пропорциональна массе тела (ускорение свободного падения одинаково для всех тел), сила всемирного тяготения также должна быть пропорциональна массам взаимодействующих тел. Приходим к следующему выражению для силы гравитационного притяжения двух точечных тел с массами M и m, находящихся на расстоянии R друг от друга:

$$F = G\frac{Mm}{R^2}, \qquad G = \mathrm{const}.$$

Направлена эта сила вдоль прямой, соединяющей тела.

Коэффициент пропорциональности G, называемый гравитационной постоянной, был измерен спустя примерно сто лет после открытий Ньютона в опыте Кавендиша с крутильными весами [1]. По современным данным

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$$

7.4.2. Аналогия между всемирным тяготением и электростатикой. Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия точечных масс. Закон всемирного тяготения Ньютона и закон Кулона взаимодействия электрических зарядов очень похожи. Поэтому многие задачи на тяготение и электростатику решаются аналогичными методами.

Рассчитаем потенциальную энергию гравитационного взаимодействия двух точечных масс M и m, находящихся на расстоянии R друг от друга. По смыслу, потенциальная энергия равна работе, совершаемой силой тяготения при

движения планет вокруг Солнца, но и для движения спутников Юпитера. Получается, что один и тот же закон тяготения действует для притяжения как к Солнцу, так и к Юпитеру.

[1] Поскольку произведение гравитационной постоянной на массу Земли определяется из известного ускорения свободного падения, опыт Кавендиша был назван "взвешиванием Земли"

медленном "растаскивании"масс на бесконечность. Эта работа отрицательна и выражается через интеграл, который рассчитывается методами, аналогичными использованным в электростатике:

$$W(R) = -\int\limits_R^{\infty} \frac{GMm}{r^2} dr = -\frac{GMm}{R}.$$

§7.5. Системы с трением

7.5.1. Сухое трение. Трение скольжения и трение покоя. В задачах часто встречаются системы с трением. Экспериментально проверены следующие закономерности для сил трения $F_{\text{тр}}$ и нормального давления N между поверхностями:

- если две поверхности неподвижны друг относительно друга, они взаимодействуют друг с другом с силой трения покоя, которая может принимать любые значения от нуля до $k_{\text{тр}}N$: $F_{\text{тр}} \leqslant k_{\text{тр}}N$;
- если одна поверхность движется относительно другой, действующая на нее сила трения направлена против относительной скорости и *равна* по величине $F_{\text{тр}} = k_{\text{тр}}N$.

Важно отличать силу трения скольжения от силы трения покоя: при движении мотоциклиста без проскальзывания на его колеса со стороны Земли действует именно сила трения покоя, а не скольжения.

7.5.2. Вязкое трение и сопротивление воздуха. Зависимость скорости тела от времени и координаты тела при движении в вязкой среде. При движении в жидкой или газообразной среде сила сопротивления, действующая на тело, обычно зависит от скорости. Как правило, при движении в жидкости с малыми скоростями сила вязкого трения пропорциональна скорости, при движении в газе сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости.

Исследуем движение тела массы m, на которое действует сила трения, пропорциональная скорости:

$$F_x = -\alpha v_x, \qquad \alpha = \mathrm{const}.$$

Запишем для движения тела второй закон Ньютона

$$m\frac{dv_x}{dt} = -\alpha v_x. \tag{7.13}$$

Тогда промежуток времени dt, требуемый для изменения скорости на dv_x ($dv_x < 0$), составит

$$dt = -\frac{m}{\alpha}\frac{1}{v_x}dv_x.$$

Следовательно, промежуток времени t_1, достаточный для изменения скорости от начального значения v_0 до конечного v_1, будет выражаться площадью под графиком:

$$t_1 = \int\limits_{v_1}^{v_0} \frac{m}{\alpha}\frac{1}{v_x}dv_x = \frac{m}{\alpha}\ln\frac{v_0}{v_1}$$

и

$$v_1 = v_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t_1}.$$

Таким образом, зависимость скорости тела от времени оказывается следующей:

$$v_x(t) = v_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t}.$$

Чтобы найти зависимость скорости от координаты, представим уравнение движения (7.13) в виде:

$$dp_x = -\alpha v_x dt = -\alpha dx.$$

Таким образом, изменение импульса тела пропорционально пройденному пути. Если импульс тела изменяется от p_0 до p_1, то пройденный путь x_1 выражается как

$$p_0 - p_1 = -\alpha x_1 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = \frac{mv_0 - mv_1}{\alpha}.$$