

Глава 11

ВОЛНОВЫЕ И КВАНТОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ

§11.1. Волновые явления

11.1.1. Уравнение колебаний системы грузов, связанных пружинами.

Изучение волновых явлений мы начнем с исследования продольных колебаний в системе большого числа грузов, связанных друг с другом в замкнутую цепочку (рис. 11.1).

Пусть m — масса груза, k — коэффициент упругости пружины. Направим ось x вдоль цепочки; получим уравнение движения для смещения ξ_i груза i (перемещается из точки x_i в точку $x_i + \xi_i$).

На груз с номером i действуют в направлении оси x силы $k(\xi_{i+1} - \xi_i)$ и $k(\xi_i - \xi_{i-1})$ (рис. 11.2). Поэтому ускорение i -го груза a_i удовлетворяет уравнению:

$$ma_i = k(\xi_{i+1} - \xi_i) + k(\xi_i - \xi_{i-1}). \quad (11.1)$$

11.1.2. Плоская волна: фаза волны, волновое число, длина волны, круговая частота, период, фазовая скорость. Колебания цепочки грузов в виде плоской волны.

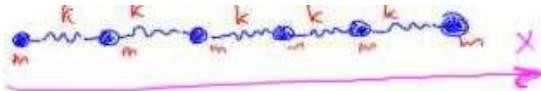


Рис. 11.1. Цепочка грузов

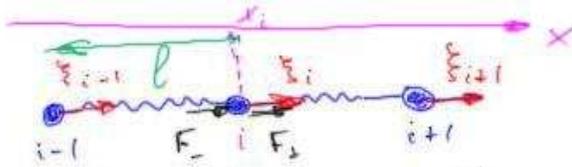


Рис. 11.2. Силы в цепочке грузов

Решение уравнения (11.1) можно искать в виде *плоской волны*:

$$\xi_i(t) = A \cos(Kx_i - \omega t). \quad (11.2)$$

Соотношение (11.2) показывает, что каждый из грузов совершает гармонические колебания с амплитудой A , круговой частотой ω (она называется круговой частотой волны), периодом колебаний $T = 2\pi/\omega$. Однако фазы колебаний $Kx_i - \omega t$ грузов оказываются разными. Если грузы в равновесии отстоят друг от друга на расстояние l , их фазы колебаний отличаются на Kl . Параметр K называется *волновым числом*. Если изобразить график зависимости смещения ξ_i от равновесной координаты груза x_i , то получится (рис. 11.3) периодическая функция с периодом

$$\lambda = 2\pi/K.$$

Именно на столько отстоят друг от друга соседние максимумы. Данное расстояние λ называется *длиной волны*.

Представим себе наблюдателя, перемещающегося вдоль цепочки грузов со скоростью v . Подождя промежуток времени Δt , данный наблюдатель сместится по горизонтали на расстояние $v\Delta t$. Фаза колебаний находящегося рядом с наблюдателем груза при этом изменится на $Kv\Delta t - \omega\Delta t$. Если скорость наблюдателя составляет $v = \omega/K$, фаза колебаний находящегося рядом с наблюдателем груза не будет меняться, — наблюдатель может все время находиться «на гребне волны». Скорость

$$c = \omega/K$$

называется *фазовой скоростью* волны. Учитывая выражения для периода колебаний и длины волны, можно привести выражение

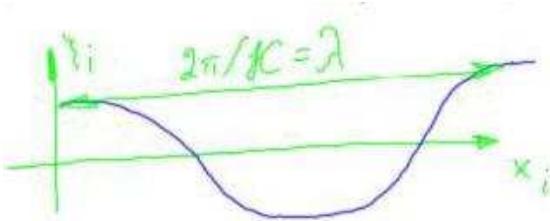


Рис. 11.3. График зависимости смещения груза от равновесной координаты груза

для фазовой скорости к виду

$$c = \frac{2\pi/T}{2\pi/\lambda} = \frac{\lambda}{T}.$$

Таким образом, фазовая скорость волны является отношением длины волны к периоду колебаний (или, наоборот, длина волны — расстояние, которое проходит волна с фазовой скоростью за период колебаний).

Покажем, что плоская волна (11.2) действительно удовлетворяет второму закону Ньютона (11.1).

Имеем:

$$\xi_{i-1}(t) = A \cos(Kx_{i-1} - \omega t), \quad \xi_{i+1}(t) = A \cos(Kx_{i+1} - \omega t).$$

Учитывая, что грузы отстают друг от друга в равновесии на расстояние l и $x_{i+1} = x_i + l$, $x_{i-1} = x_i - l$, получим:

$$\xi_{i-1}(t) = A \cos(\varphi_i - Kl), \quad \xi_{i+1}(t) = A \cos(\varphi_i + Kl),$$

где

$$\varphi_i = Kx_i - \omega t.$$

Используя формулу для косинуса суммы, получим:

$$\xi_{i-1} + \xi_{i+1} = 2A \cos \varphi_i \cos Kl = 2\xi_i \cos Kl.$$

Также учтем, что ускорение i -го груза, совершающего гармонические колебания, пропорционально его смещению: $a_i = -\omega^2 \xi_i$. Поэтому уравнение (11.1) принимает вид:

$$-m\omega^2 \xi_i = 2k\xi_i \cos Kl - 2k\xi_i,$$

или

$$m\omega^2 = 2k(1 - \cos Kl) = 4k \sin^2(Kl/2).$$

Будем считать, что длина волны много больше расстояния между соседними грузами (одна волна охватывает большое количество грузов). Тогда можно считать, что $Kl/2 \ll 1$, и $\sin(Kl/2) \simeq Kl/2$. Приведем соотношение для частоты колебаний к виду:

$$m\omega^2 \simeq 4k(Kl/2)^2,$$

или

$$\omega/K = \sqrt{k/m} \cdot l.$$

Таким образом, в рассматриваемой системе связанных грузов могут распространяться волны с фазовой скоростью $c = l\sqrt{k/m}$.

11.1.3. Распространение поперечных волн по струне.

Рассмотрим струну, натянутую с силой натяжения T . Пусть в равновесии струна направлена по оси x . Рассмотрим малые поперечные отклонения струны от равновесия (рис. 11.4).

Запишем второй закон Ньютона для струны.

Рассмотрим малый участок струны, расположенный между точками с координатами x и $x + \Delta x$ (рис. 11.5). На него по оси y действуют силы: $T \sin \alpha(x + \Delta x)$ в положительном направлении и $T \sin \alpha(x)$ в отрицательном направлении. Здесь $\alpha(x)$ — угол наклона струны к оси x . Поскольку тангенс этого угла равен производной $y'(x)$, а синус приближенно равен тангенсу, действующая на рассматриваемый участок сила равна

$$T(y'(x + \Delta x) - y'(x)) = Ty''(x)\Delta x.$$

Обозначая через S площадь поперечного сечения струны, а через ρ — плотность материала струны, запишем второй закон Ньютона для ускорения a_y участка струны по оси y :

$$\rho S \Delta x \cdot a_y = Ty''(x)\Delta x$$

Отсюда

$$\rho S \cdot a_y = Ty''(x). \quad (11.3)$$

Будем искать решение уравнения (11.3) в виде плоской волны:

$$y = A \cos(Kx - \omega t).$$

Найдем, при каких условиях плоская волна удовлетворяет уравнению (11.3).

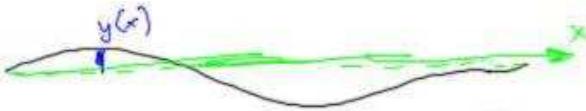


Рис. 11.4. Поперечные колебания струны

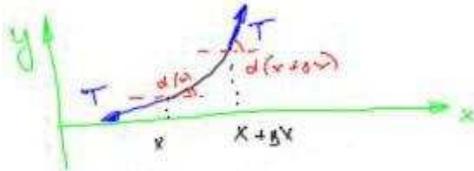


Рис. 11.5. Силы, действующие на участок струны

Имеем:

$$a_y = -\omega^2 y, \quad y'' = -K^2 y.$$

Уравнение (11.3) преобразуется к виду:

$$\rho S \omega^2 = T K^2$$

и

$$\frac{\omega}{K} = \sqrt{\frac{T}{\rho S}}.$$

Таким образом, плоская волна по натянутой с силой T струне плотности ρ и площади поперечного сечения S может распространяться только со скоростью $\sqrt{T/(\rho S)}$.

11.1.4. Плоская электромагнитная волна: направления электрического и магнитного полей, уравнения для компонент, скорость распространения.

Исследуем теперь распространение электромагнитной волны вдоль оси x . Будем предполагать, что как напряженность электрического поля, так и магнитная индукция зависят от координаты x и времени t по закону

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 \cos(Kx - \omega t), \quad \mathbf{B}(x, t) = \mathbf{B}_0 \cos(Kx - \omega t). \quad (11.4)$$

Исследуем направления электрического и магнитного полей.

Для исследования направления вектора \mathbf{E} запишем теорему Гаусса для поверхности, изображенной на рисунке 11.6. Если на левой границе поверхности $Kx = \omega t$ и $\mathbf{E} = 0$, поток вектора \mathbf{E} через правую границу тоже должен обращаться в нуль. Следовательно, напряженность \mathbf{E} направлена по касательной к поверхности и $E_x = 0$.

Аналогично получаем, что $B_x = 0$.

Можно выбрать систему координат, направив ось y вдоль вектора \mathbf{E} .

Докажем теперь, что $B_y = 0$ (а значит, вектор \mathbf{B} направлен вдоль оси z).

Рассмотрим изображенный на рисунке 11.7 контур. Поскольку напряженность электрического поля направлена перпендикулярно контуру, имеем:

$$\oint (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}) = 0.$$

Данный интеграл, имеющий смысл ЭДС в контуре, пропорционален скорости изменения магнитного потока. Следовательно, магнитный поток через данный контур не меняется — это возможно только в случае, когда $B_y = 0$.

Получим теперь уравнения для E_y и B_z .

Рассмотрим опять контур с размерами Δx и l , изображенный на рис. 11.7. Запишем для него теорему о циркуляции магнитного поля с учетом тока смещения Максвелла:

$$\oint (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}) = \frac{1}{c^2} \frac{\Delta \Phi_E}{\Delta t}. \quad (11.5)$$

Здесь $c = \sqrt{k_{\text{эл}}/k_{\text{магн}}}$ — фундаментальная константа электромагнетизма.

Левая часть соотношения (11.5) равна

$$B_z(x)l - B_z(x + \Delta x)l = -B'_z(x)l\Delta x.$$

Правая часть соотношения (11.5) равна

$$\frac{1}{c^2} \frac{\Delta E_y}{\Delta t} l \Delta x.$$

Приравнивая левую и правую части, находим первое из искомых уравнений:

$$-B'_z(x) = \frac{1}{c^2} \frac{\Delta E_y}{\Delta t}. \quad (11.6)$$

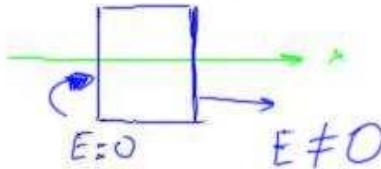


Рис. 11.6. К исследованию направления электрического поля в электромагнитной волне

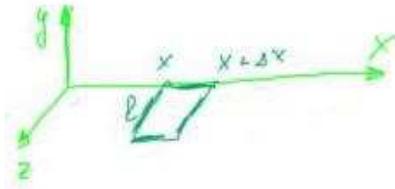


Рис. 11.7. К доказательству перпендикулярности электрического и магнитного поля в электромагнитной волне и выводу уравнений

Для получения второго уравнения рассмотрим контур, изображенный на рисунке 11.8. Запишем для него закон электромагнитной индукции:

$$\oint (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}) = - \frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t}. \quad (11.7)$$

Левая часть уравнения (11.7) равна

$$E_y(x + \Delta x)l - E_y(x)l = E_y'(x)l\Delta x.$$

Для правой части имеем:

$$- \frac{\Delta B_z}{\Delta t} l \Delta x.$$

Приравнявая левую и правую части, получим:

$$E_y'(x) = - \frac{\Delta B_z}{\Delta t}. \quad (11.8)$$

Объединяя уравнения (11.6) и (11.8), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E_y}{\Delta t} &= -c^2 B_z'(x); \\ \frac{\Delta B_z}{\Delta t} &= -E_y'(x). \end{aligned} \quad (11.9)$$

Покажем, что плоская волна (11.4) удовлетворяет системе (11.9).

Имеем:

$$E_y(x, t) = E_0 \cos(Kx - \omega t), \quad B_z(x, t) = B_0 \cos(Kx - \omega t).$$

Проводя дифференцирование, получим:

$$\begin{aligned} E_y' &= -E_0 K \sin(Kx - \omega t), & \frac{\Delta E_y}{\Delta t} &= E_0 \omega \sin(Kx - \omega t); \\ B_z' &= -B_0 K \sin(Kx - \omega t), & \frac{\Delta B_z}{\Delta t} &= B_0 \omega \sin(Kx - \omega t). \end{aligned}$$

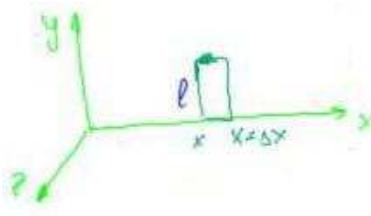


Рис. 11.8. К выводу уравнений

Подставляя производные в систему (11.9), получим:

$$E_0\omega = c^2 K B_0, \quad B_0\omega = E_0 K.$$

Перемножая уравнения, получим:

$$\omega^2 = K^2 c^2.$$

Таким образом, электромагнитные волны могут распространяться только со скоростью $\omega/K = c = \sqrt{k_{\text{эл}}/k_{\text{магн}}}$. При этом $E_0 = B_0 c$.

§11.2. Волновая оптика

11.2.1. Принцип Гюйгенса. Объяснение закона преломления света с точки зрения волновой теории света.

Представление о волновой природе света восходит к работам Гюйгенса, который трактовал распространение света следующим образом: световая волна доходит до некоторой точки, она становится источником вторичных волн, которые достигают других точек пространства — и процесс продолжается. На рисунке 11.9 световая волна сначала доходит до точек на прямой линии слева, — из этих точек испускаются вторичные волны, которые достигают следующей прямой линии. Процесс продолжается бесконечно.

С помощью данной концепции Гюйгенс дал вывод закона преломления света.

Пусть в среде 1 свет распространяется со скоростью c_1 , а в среде 2 — со скоростью c_2 . Пусть волна падает на границу раздела сред под углом α_1 . В начальный момент времени волна дошла до точки A , которая начала испускать вторичные волны в среду 2. Через время τ вторичная волна во второй среде дошла до точек на окружности радиуса $c_2\tau$; в первой среде волна дошла из точки B в точку C , пройдя расстояние $c_1\tau$. Вторичные волны во второй среде,

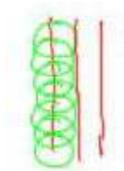


Рис. 11.9. Распространение света по Гюйгенсу

сложившись, заполнили область, ограниченную прямой CD . Угол преломления составляет α_2 .

Обозначая $AC = l$, запишем тригонометрические соотношения:

$$\sin \alpha_1 = \frac{c_1 \tau}{l}, \quad \sin \alpha_2 = \frac{c_2 \tau}{l}.$$

Следовательно,

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}. \quad (11.10)$$

Сравнивая полученное Гюйгенсом выражение (11.10) для закона преломления с традиционной записью данного закона

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

приходим вслед за Гюйгенсом к выводу, что скорость света в среде обратно пропорциональна показателю преломления:

$$c_1 = c/n_1, \quad c_2 = c/n_2.$$

11.2.2. Сложение колебаний и интерференция света. Условия максимумов и минимумов в интерференционной картине (через разность фаз и разность хода) на примере опыта Юнга.

Важным доводом в пользу волновой природы света явились опыты по интерференции света – сложению колебаний.

Представим себе, что складываются два колебания

$$A(t) = A_0 \cos(\omega t + \alpha), \quad B(t) = B_0 \cos(\omega t + \beta).$$

Сумма данных колебаний $C(t) = A(t) + B(t)$ также зависит от времени по гармоническому закону

$$C(t) = C_0 \cos(\omega t + \gamma).$$

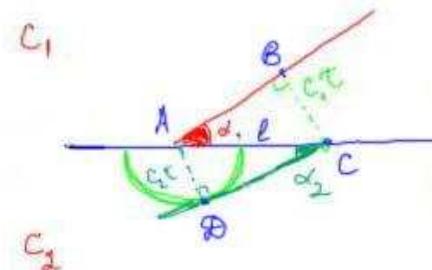


Рис. 11.10. Преломление света по Гюйгенсу

Исследуем, какой может быть амплитуда C_0 результирующего колебания в зависимости от амплитуд A_0 и B_0 .

Проще всего ответить на данный вопрос, используя комплексную запись тригонометрических функций — тогда сразу получаются уравнения

$$C_0 e^{i\gamma} = A_0 e^{i\alpha} + B_0 e^{i\beta}.$$

Комплексные числа $A_0 e^{i\alpha}$, $B_0 e^{i\beta}$ и $C_0 e^{i\gamma}$ изображены на рисунке 11.11. Видно, что максимально возможное значение $C_0 = A_0 + B_0$ достигается, когда начальные фазы α и β совпадают (или отличаются на величину, кратную 2π); минимально возможное значение $C_0 = |A_0 - B_0|$ достигается, когда фазы отличаются на π (колебания в противофазе).

Для наблюдения интерференции света Юнг предложил опыт, схема которого изображена на рис. 11.12. В данной схеме свет может идти к цели по двум маршрутам, один из которых имеет длину l_1 , а другой — длину l_2 (разность этих длин называют *разностью хода*). В точке наблюдения складываются два колебания, одно из которых пропорционально $\cos(Kl_1 - \omega t)$, а другое $\cos(Kl_2 - \omega t)$. Амплитуда результирующего колебания будет максимальна, когда разность фаз кратна 2π , и минимальна, когда

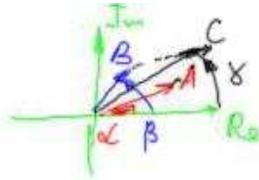


Рис. 11.11. Сложение колебаний через комплексные числа

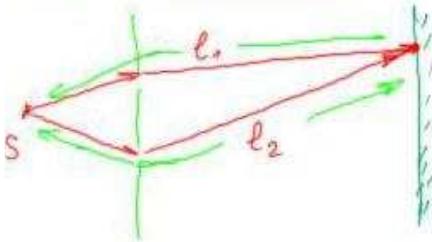


Рис. 11.12. Схема опыта Юнга

разность фаз равна π с точностью $2\pi k$:

$$K(l_1 - l_2) = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots, \quad \text{максимум;}$$

$$K(l_1 - l_2) = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots, \quad \text{минимум.}$$

Учитывая, что $2\pi/K = \lambda$, приведем данные условия к виду:

$$|l_1 - l_2| = 0, \lambda, 2\lambda, \dots, \quad \text{максимум;}$$

$$|l_1 - l_2| = \frac{1}{2}\lambda, \frac{3}{2}\lambda, \frac{5}{2}\lambda, \dots, \quad \text{минимум.}$$

11.2.3. Анализ опыта Юнга. Примеры реализаций опыта (билинза, бипризма, бизеркало).

Проведем теперь количественный анализ опыта Юнга (рис. 11.13).

Пусть δ — расстояние между щелями в первом экране. Будем для простоты считать, что колебания в этих щелях происходят в одной фазе. Обозначим через y расстояние от точки наблюдения до оси симметрии системы. Квадраты длин l_1 и l_2 рассчитаем по теореме Пифагора:

$$l_1^2 = L^2 + (y + \delta/2)^2, \quad l_2^2 = L^2 + (y - \delta/2)^2.$$

Для расчета разности хода удобно провести преобразование:

$$l_1 - l_2 = \frac{l_1^2 - l_2^2}{l_1 + l_2}.$$

Учитывая, что $l_1^2 - l_2^2 = 2y\delta$, а $l_1 + l_2 \simeq 2L$, находим:

$$l_1 - l_2 = \frac{y\delta}{L}.$$

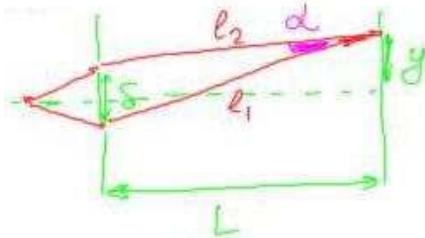


Рис. 11.13. К расчету положения максимумов и минимумов в опыте Юнга

Следовательно, максимумы в интерференционной картине будут наблюдаться при

$$y\delta/L = 0, \quad \pm\lambda, \quad \pm 2\lambda, \dots,$$

или при

$$y = 0, \quad \pm\lambda L/\delta, \quad \pm 2\lambda L/\delta, \dots$$

Расстояние между соседними максимумами оказывается равно

$$\Delta y = \frac{\lambda L}{\delta}. \quad (11.11)$$

Если обозначить через $\alpha \simeq \delta/L$ угол, под которым видны два источника из точки наблюдения, можно привести соотношение для расстояния между полосами (11.11) к виду

$$\Delta y = \frac{\lambda}{\alpha}.$$

Данное соотношение можно использовать для исследования интерференции двух плоских волн, распространяющихся под малым углом α друг к другу.

В качестве примеров конкретных схем реализации опыта Юнга можно привести (рис. 11.14): бипризму (идущие рядом пучки лучей отклоняются на малые углы в противоположные стороны — между ними происходит интерференция), билинзу (половинки линзы раздвигаются на малые расстояния — формируются два изображения источника, световые волны от которых интерферируют), бизеркало (два зеркала формируют два изображения источника, волны от которых интерферируют), зеркало (интерференция источника и его изображения).

11.2.4. Интерференция в тонких пленках. Кольца Ньютона.

Пусть зеркальная поверхность покрыта тонкой пленкой из вещества с показателем преломления n , а луч света падает на эту пленку почти перпендикулярно (рис. 11.15). Луч может отразиться от пленки двумя способами: сразу от верхней границы или же, после прохождения через пленку, от нижней границы. Образованные таким образом два луча будут интерферировать друг с другом. В зависимости от толщины пленки, они могут усиливать или ослаблять друг друга.

Пусть толщина пленки равна d , волновое число световой волны в воздухе K , в среде $K_1 = nK$ (скорость света в среде уменьшается в n раз по сравнению с воздухом, а частота колебаний остается неизменной). Луч, прошедший сквозь пленку туда и обратно, ис-

пытывает дополнительный набег фазы $K_1 \cdot 2d = 2Knd$. Следовательно, два луча усиливают друг друга при

$$2Knd = 0, 2\pi, 4\pi, \dots,$$

или при

$$2nd = 0, \lambda, 2\lambda, \dots$$

В приведенном рассуждении предполагалось, что дополнительные набег фаз при отражении для обоих лучей одинаковы. При расчете отражений следует в общем случае руководствоваться правилом:

- если показатель преломления за отражающей поверхностью больше, чем перед отражающей поверхностью, изменение фазы равно π ;
- если показатель преломления за отражающей поверхностью меньше, чем перед отражающей поверхностью, изменение фазы равно нулю.

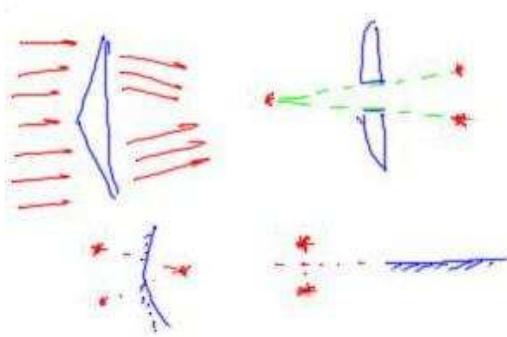


Рис. 11.14. Примеры реализаций опыта Юнга

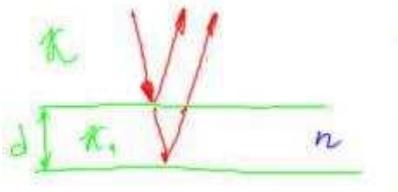


Рис. 11.15. Падение луча на тонкую пленку

Обоснование данного правила выходит за рамки школьной программы.

В качестве примера экспериментальной реализации схемы интерференции в тонких пленках можно привести кольца Ньютона (рис. 11.16). Используется система из плоскопараллельной пластинки и плосковыпуклой линзы. Образующийся между ними тонкий воздушный промежуток как раз и играет роль «тонкой пленки». Два луча, между которыми происходит интерференция, показаны на рис. 11.16.

11.2.5. Дифракция света. Дифракционная решетка.

Одно из проявлений волновых свойств света — отклонение от закона прямолинейного распространения света, огибание светом препятствий. Наиболее ярким примером является прохождение света через дифракционную решетку — специальный экран, в котором имеется большое количество щелей на расстоянии l друг от друга.

Представим себе плоскую волну, падающую на такую дифракционную решетку (рис. 11.17). Волновые свойства света проявляются в том, что после прохождения через решетку лучи могут отклониться на некоторый угол α . Разность хода между соседними лучами будет составлять $l \sin \alpha \simeq l\alpha$ (угол α считаем малым). Поэтому лучи будут усиливаться, если угол α будет удовлетворять соотношению:

$$l\alpha = 0, \lambda, 2\lambda, \dots$$

Отклоненные лучи удобнее всего наблюдать, расположив за дифракционной решеткой линзу. Тогда параллельные пучки лучей, идущие под разными углами, будут фокусироваться в разные точки — в фокальной плоскости можно будет наблюдать максимумы.

§11.3. Квантовые явления

Изучение квантовой механики выходит далеко за рамки школьной программы. Ниже рассматриваются только некоторые

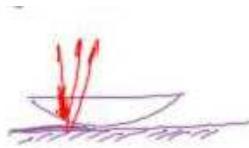


Рис. 11.16. Кольца Ньютона

из квантовых явлений. Они наглядно демонстрируют, что классическая физика имеет свои границы применимости, поэтому для их объяснения привлекаются идеи и представления, лежащие за пределами классической науки.

11.3.1. Законы фотоэффекта. Идея Планка о дискретности уровней энергии осциллятора, использование идеи Планка при объяснении законов фотоэффекта по Эйнштейну.

Основные законы фотоэффекта были открыты в опытах А.Г. Столетова в конце XIX века. Явление фотоэффекта заключается в том, что при облучении металлической пластинки светом из металла вырываются электроны.

Экспериментально были установлены следующие закономерности:

фотоэффект наблюдается, только если круговая частота падающего света ω больше некоторого критического значения («красной границы») $\omega_{кр}$;

энергия вылетающих электронов зависит только от круговой частоты падающего света ω и не зависит от интенсивности света; при увеличении интенсивности падающего света увеличивается количество вылетающих электронов.

Объяснить законы фотоэффекта оказалось возможным только с использованием квантовых представлений.

В классической физике энергия груза на пружинке (гармонического осциллятора с круговой частотой ω) может принимать любые значения. М. Планк (1900), объясняя закономерности излучения абсолютно черного тела, предположил, что энергия гармонического осциллятора излучения принимает лишь дискретные значения, отстоящие друг от друга на расстояние $\hbar\omega$.

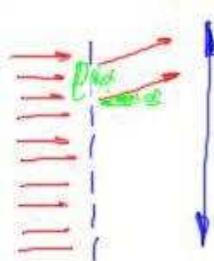


Рис. 11.17. Падение света на дифракционную решетку

А. Эйнштейн (1905) дал следующую трактовку идеи Планка: световая волна с круговой частотой ω распространяется порциями энергии $\hbar\omega$. При падении света на металлическую пластину энергия такой порции («фотона») идет на совершение работы выхода $A_{\text{вых}}$ электрона из металла и разгон электрона массой m до скорости v :

$$\hbar\omega = A_{\text{вых}} + \frac{mv^2}{2}.$$

Концепция Эйнштейна полностью объяснила все законы фотоэффекта.

11.3.2. Спектры излучения атомов и молекул. Представление об уровнях энергии. Модель атома Резерфорда. Оценка расстояния между уровнями энергии и размера атома по Бору.

Во второй половине XIX века было установлено, что каждый атом или молекула может испускать электромагнитные волны строго определенных частот. В связи с накоплением опытных данных в данной области возник вопрос о теоретическом объяснении закономерностей атомных спектров. На рубеже XIX-XX веков в ходе анализа данных было показано, что круговые частоты испускаемых атомом световых волн задаются формулой

$$\omega_{mn} = T_m - T_n, \quad (11.12)$$

где T_1, T_2, \dots — термы атома.

Данная закономерность была объяснена Н. Бором (1913) с позиций квантовых представлений следующим образом. Поскольку Планк уже показал, что гармонический осциллятор может находиться только на определенных уровнях энергии, отстоящих друг от друга на расстояние $\hbar\omega$, Бор предположил, что атомы и молекулы тоже могут находиться только на определенных уровнях энергии E_n . Когда атом (молекула) переходит с уровня E_m на уровень E_n , выделяется энергия $E_m - E_n$, которая переходит в энергию фотона $\hbar\omega$. Таким образом, по закону сохранения и превращения энергии круговая частота излучаемого фотона

$$\omega = E_m/\hbar - E_n/\hbar,$$

что соответствует соотношению 11.12.

Для теоретической оценки по порядку величины характерных расстояний между уровнями энергии атома водорода Бор воспользовался планетарной моделью атома, которая была предложена Э.Резерфордом (1911) в ходе обработки результатов опытов по рассеянию α -частиц на фольге. Согласно планетарной модели, атом водорода представляет из себя совокупность тяжелого ядра

(заряд $+e$) и легкого электрона (масса m , заряд $-e$), который вращается вокруг ядра по орбите. Для проведения оценок по порядку величины можно использовать два уравнения: «классическое» и «квантовое». Согласно классическому уравнению (второму закону Ньютона для электрона, движущегося по окружности радиуса r с круговой частотой ω),

$$m\omega^2 r = \frac{k_{\text{эл}} e^2}{r^2}. \quad (11.13)$$

Согласно «квантовому» уравнению, энергия атома водорода должна по порядку величины совпадать с $\hbar\omega$. Считая энергию атома порядка модуля потенциальной энергии взаимодействия электрона с ядром, запишем:

$$\hbar\omega \sim \frac{k_{\text{эл}} e^2}{r}. \quad (11.14)$$

Из уравнений (11.13) и (11.14) можно оценить по порядку величины размер атома водорода r и величину его энергии.

Возведем уравнений (11.14) в квадрат и разделим его на (11.13).

Получим:

$$\frac{\hbar^2}{mr} \sim k_{\text{эл}} e^2.$$

Отсюда

$$r \sim \frac{\hbar^2}{k_{\text{эл}} e^2 m}.$$

Энергию атома водорода оценим как

$$\frac{k_{\text{эл}} e^2}{r} \sim \frac{m(k_{\text{эл}} e^2)^2}{\hbar^2},$$

а частоты излучаемых фотонов — как отношение энергии к постоянной Планка:

$$\omega \sim \frac{m(k_{\text{эл}} e^2)^2}{\hbar^3}$$

Полученные Бором оценки неплохо согласуются с экспериментальными данными.

