Глава 10

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

§10.1. Магнитостатика

10.1.1. Закон Кулона взаимодействия магнитных полюсов. Количество магнетизма. Понятие о магнитной индукции. Магнитные полюса и электрические заряды: сходство, различие. Хорошо известен закон Кулона взаимодействия электрических зарядов. Однако вначале Кулон открыл закон взаимодействия магнитных полюсов [1]) и только затем перешел к исследованию электрических зарядов.

Для количественного описания магнитного взаимодействия Кулон ввел физическую величину — "количество магнетизма"на полюсе магнита. Предполагается, что на северном полюсе магнита "накоплено"положительное количество магнетизма $+\mathcal{M}$, а на южном — отрицательное $-\mathcal{M}$.

Согласно опытам Кулона, сила F взаимодействия магнитных полюсов направлена вдоль прямой, соединяющей полюса [2]), пропорциональна "количествам магнетизма"$\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ и обратно пропорциональна квадрату расстояния r

---

[1]) Притяжение и отталкивание магнитов наблюдать гораздо проще, чем взаимодействие электрических зарядов

[2]) Чтобы южные полюса магнитов не мешали исследовать взаимодействие северных полюсов, следует брать магниты в виде длинных спиц:

между полюсами:

$$F = k_{\text{магн}} \frac{\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2}{r^2}.$$

Здесь $k_{\text{магн}}$ — магнитная постоянная, зависящая от выбора единиц измерения "количества магнетизма" [1]. При этом одноименные полюса отталкиваются, а разноименные притягиваются.

Аналогом напряженности электрического поля является понятие магнитной индукции $\overrightarrow{B}$. Пусть магнитный полюс $+\mathcal{M}$ взаимодействует с другими магнитами [2]. Сила $\overrightarrow{F}$, действующая на полюс, пропорциональна количеству магнетизма $\mathcal{M}$ на нем:

$$\overrightarrow{F} = \mathcal{M} \overrightarrow{B}.$$

Коэффициент пропорциональности $\overrightarrow{B}$ называется индукцией магнитного поля в точке, где находится магнитный полюс. [3]

Между взаимодействием магнитных полюсов и электрических зарядов много общего: в обоих случаях сила взаимодействия убывает с расстоянием по закону обратных квадратов. Однако имеется и принципиальное различие: если разломить магнит в надежде получить изолированные северный и южный полюса, на месте разлома образуются новые полюса — и каждые из маленьких магнитиков оказывается с нулевым суммарным "количеством магнетизма".

10.1.2. Магнитный диполь, его магнитный дипольный момент. Момент сил, действующих на магнитный диполь. Работа по перемещению диполя в магнитном

южные полюса магнитов будут находиться на достаточно большом расстоянии и взаимодействовать практически не будут

[1] Единицы измерения количества магнетизма обсуждаются ниже

[2] и электрическими токами

[3] После того как Эрстед установил, что магниты взаимодействуют с электрическими токами, основной способ определния магнитной индукции стал основываться на действии магнитного поля на контур с током. Однако и "магнитное"определение магнитной индукции вполне допустимо.

поле. Ввиду невозможности получения изолированного магнитного полюса особую важность приобретает изучение свойств магнитного диполя, который состоит из северного и южного магнитных полюсов $\pm\mathcal{M}$, находящихся на расстоянии l друг от друга. Величина

$$p_m = \mathcal{M}l$$

называется магнитным дипольным моментом магнитного диполя. Дипольный момент рассматривается как векторная величина: за направление вектора $\overrightarrow{p}_m$ принимают направления от полюса $-\mathcal{M}$ к полюсу $+\mathcal{M}$ (рис. 10.1).

Пусть магнитный диполь расположен под углом α к однородному магнитному полю, направленному вдоль оси z. В этом случае суммарная действующая на диполь сила равна нулю: действующие на полюса силы равны по модулю $\mathcal{M}B$ и противоположны по направлению (рис. 10.2).

Однако из-за различных точек приложения сил их моменты оказываются отличны: плечи сил относительно любой оси отличаются на $l\sin\alpha$. Поэтому общий момент сил, действующий на диполь, равен

$$M = \mathcal{M}B \cdot l\sin\alpha = p_m B\sin\alpha.$$

Найдем потенциальные энергии полюсов магнита в магнитном поле. Поскольку на полюс $-\mathcal{M}$ действует направленная противоположно оси z сила $\mathcal{M}B$, его потенциальная энергия зависит от координаты z_- как $W_- = \mathcal{M}Bz_-$. Ана-

Рис. 10.1. ***

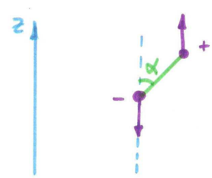

Рис. 10.2. ***

логично, потенциальная энергия полюса $+\mathcal{M}$ зависит от его координаты z_+ как $W_+ = -\mathcal{M}Bz_+$.

Общая потенциальная энергия диполя в магнитном поле составляет

$$W = -\mathcal{M}B(z_+ - z_-) = -\mathcal{M}Bl\cos\alpha = -p_m B\cos\alpha = -(\overrightarrow{p}_m \cdot \overrightarrow{B}).$$

Для перемещения диполя в магнитном поле требуется затратить минимальную работу, равную изменению потенциальной энергии

$$A = \Delta W = -\Delta(p_m B\cos\alpha). \tag{10.1}$$

10.1.3. Опыт Эрстеда (1820): взаимодействие электрического тока с магнитом. Аналогия Ампера: малый контур с током как магнитный диполь. Измерение силы тока по создаваемому магнитному полю. Сначала считалось, что магнитные и электростатические взаимодействия никак не связаны друг с другом. Однако в 1820 году Эрстед обнаружил, что разряжающаяся батарейка влияет на компас — так было открыто магнитное действие электрического тока. [1)]

Экспериментальные исследования магнитного действия электрического тока провел Ампер (1820). Он обнаружил, что малый контур с током ведет себя при взаимодействии с магнитами точно так же, как и маленький магнит — магнитный диполь. Возникает вопрос, как связан магнитный момент этого диполя с силой тока I и площадью контура S.

Представим себе, что мы объединили два контура с одинаковой силой тока. Тогда они должны действовать на магнит в два раза сильнее, чем один контур — при увеличе-

[1)] Понимал ли Эрстед, что своим открытием он запустил почти форсированную цепочку событий, приведших в конце концов к специальной теорией относительности?

нии силы тока в два раза магнитный момент контура должен быть в два раза больше (рис. 10.3).

Если мы объединим два контура с током, положив их рядом друг с другом, то получим контур с той же силой тока, но вдвое большей площади. Магнитный момент такого контура должен быть в два раза больше — он должен быть пропорционален площади (рис. 10.4).

Приведенные рассуждения показывают, что магнитный момент контура с током пропорционален и силе тока I, и площади S:

$$p_m \sim IS. \tag{10.2}$$

Коэффициент пропорциональности в данном соотношении зависит от выбора системы единиц. Поскольку основным способом измерения силы тока является магнитное взаимодействие этого тока, единицу измерения силы тока удобно связывать именно с единицей измерения магнитного момента. Поэтому в системе СИ коэффициент пропорциональности в формуле (10.2) выбирается равным единице:

$$p_m = IS. \tag{10.3}$$

Как показали опыты Ампера, магнитный момент контура с током направлен перпендикулярно площади контура. При этом электрический ток, если на него посмотреть из

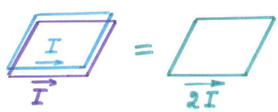

Рис. 10.3. ***

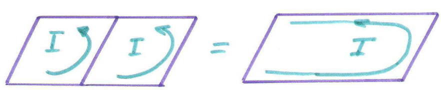

Рис. 10.4. ***

конца вектора $\overrightarrow{p}_m$, будет протекать против часовой стрелки (рис. 10.5).

10.1.4. Единицы измерения силы тока, магнитного дипольного момента, количества магнетизма, магнитной индукции, магнитной постоянной в системе СИ. Значение магнитной постоянной в системе СИ. В системе СИ единицей измерения силы тока является ампер (1 А). Опираясь на этот факт, определим, в каких единицах в системе СИ измеряются другие магнитные величины:

- магнитный дипольный момент измеряется в $\text{А} \cdot \text{м}^2$;
- количество магнетизма $\mathcal{M}$ измеряется в $\text{А} \cdot \text{м}$;
- магнитная индукция B измеряется в $\dfrac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}$;
- магнитная постоянная $k_{\text{магн}}$ измеряется в $\dfrac{\text{Н}}{\text{А}^2}$.

В системе СИ единица измерения силы тока (ампер) подобрана таким образом, чтобы численное значение магнитной постоянной составляло 10^{-7}:

$$k_{\text{магн}} = 10^{-7}\ \frac{\text{Н}}{\text{А}^2}.$$

Именно это определение ампера (а не определение 1 Кл/с) является основным. Отметим, что определив 1 А, мы определили и 1 Кл, а значит зафиксировали значение электростатической постоянной.

10.1.5. Работа по перемещению контура с постоянным током в магнитном поле и изменение магнитного потока. Комбинируя формулу для работы по перемещению магнитного диполя в магнитном поле (10.1) и выражение

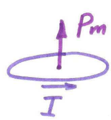

Рис. 10.5. ***

для магнитного момента (10.3) контура с током, получаем соотношение для работы по перемещению контура с постоянным током I в магнитном поле:

$$A = -\Delta(ISB\cos\alpha).$$

По аналогии с потоком электрического поля, величину $BS\cos\alpha$ можно рассматривать как поток Φ_B вектора $\vec{B}$ через контур с током [1]. Тогда выражение для работы упростится:

$$A = -I\Delta\Phi_B. \tag{10.4}$$

Выражение (10.4), полученное для *малого* контура с током, оказывается справедливым и для сколь угодно большого контура: его можно разбить на большое число маленьких контуров, для каждого из которых соотношение (10.4) проверено.

10.1.6. Сила Ампера, действующая на элемент тока в магнитном поле. Связь выражений для силы Ампера и работы по перемещению контура с током. Представим, что имеется большой контур с током, и небольшой его прямолинейный участок длины l проходит через область, в которой создано магнитное поле B, направленное в плоскости yz. Направим ось y вдоль направления тока в проводнике, ось x — перпендикулярно проводнику в плоскости контура, ось z — перпендикулярно осям x и y [2] (рис. 10.6).

Переместим контур вдоль оси x на Δx, вдоль оси y на Δy, вдоль оси z на Δz. Только при перемещении вдоль оси x поток магнитного поля через контур изменится — за счет увеличения площади, через которое проходит магнитное по-

[1] Направление нормали к контуру следует выбирать таким образом, чтобы электрический ток, видимый из конца нормали, тек против часовой стрелки

[2] поворот от оси x к оси y виден из положительных точек оси z совершающимся против часовой стрелки

ле. Изменение магнитного потока составит:

$$\Delta\Phi_B = B_z l \Delta x.$$

Следовательно, работа по перемещению контура с током составила

$$A = -IB_z l \Delta x.$$

Это значит, что на контур со стороны магнитного поля действовала сила, направленная вдоль оси x и равная

$$F_x = IB_z l.$$

Таким образом, на малый проводник длиной l с током I в магнитном поле B действует сила F, удовлетворяющая свойствам:

- F направлена перпендикулярно к магнитному полю и проводнику с током;
- поворот от направления тока к направлению вектора $\overrightarrow{B}$ виден из конца вектора $\overrightarrow{F}$ совершающимся против часовой стрелки;
- величина силы равна

$$F = IB_\perp l, \tag{10.5}$$

где $B_\perp$ — компонента магнитного поля, направленная перпендикулярно направлению тока (рис. 10.7).

Сила (10.5), действующая на проводник с током в магнитном поле, была измерена в опытах Ампера и называется *силой Ампера*. Именно с помощью соотношения (10.5) ста-

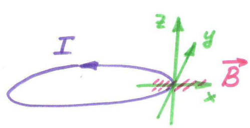

Рис. 10.6. ***

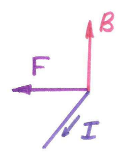

Рис. 10.7. ***

ли определять магнитную индукцию после открытий Ампера.

Формулу Ампера (10.5) можно также записать, используя известное из математики обозначение для *векторного произведения* вектора $\overrightarrow{l}$, направленного вдоль тока и равного по величине длине проводника, на вектор $\overrightarrow{B}$:

$$\overrightarrow{F} = I\left[\overrightarrow{l} \times \overrightarrow{B}\right].$$

10.1.7. Магнитное поле контура с током произвольной формы (замена контура на магнитный листок). Теорема о циркуляции магнитного поля. Как можно рассчитать магнитное поле, создаваемое произвольным контуром с током? Если мы разобьем этот контур на большое количество маленьких контуров с одинаковыми токами I, то каждый из маленьких контуров площади ΔS можно будет заменить на маленький магнит с дипольным моментом $I\Delta S$. Таким образом, образуется большое количество воображаемых маленьких магнитов, на которые мы заменили контур с током. Если считать расстояние между полюсами магнита равным l, то у нас на одной плоскости возникает много северных магнитных полюсов $+I\Delta S/l$, а на другой плоскости, на расстоянии l, много южных магнитных полюсов $-I\Delta S/l$ (рис. 10.8).

Таким образом, весь контур с током I площади S заменяется на *магнитный листок* — плоский магнит малой толщины l, на одной стороне которого равномерно распределено количество магнетизма $+\mathcal{M} = +IS/l$, а на другой стороне — количество магнетизма $-\mathcal{M} = -IS/l$. Магнитное по-

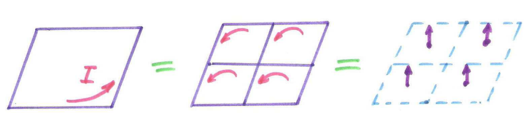

Рис. 10.8. ***

ле, создаваемое таким листком, можно рассчитать с использованием закона Кулона взаимодействия магнитных полюсов (рис. 10.9).

При расчете магнитных полей можно использовать *теорему о циркуляции* магнитного поля. Это утверждение можно получить на основе аналогии между электрическими зарядами и магнитными полюсами. Из электростатики известно, что разность потенциалов между пластинами плоского конденсатора (заряды пластин $\pm q$, площадь пластин S, расстояние между пластинами l), равная работе электрического поля по перемещению единичного заряда с положительно заряженной пластины на отрицательную, составляет

$$\Delta\varphi = \int\limits_{+\to -} (\overrightarrow{E}\cdot d\overrightarrow{l}) = 4\pi k_{\text{эл}}\frac{q}{S}l.$$

По аналогии заключаем, что работе магнитного поля по перемещению единичного магнитного полюса с северного полюса магнитного листка (площадь S, толщина l, количества магнетизма $\pm\mathcal{M} = IS/l$) на южный составит (рис. 10.10)

$$\int\limits_{+\to -} (\overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{l}) = 4\pi k_{\text{магн}}\frac{\mathcal{M}}{S}l = 4\pi k_{\text{магн}}I.$$

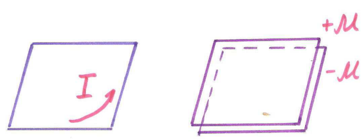

Рис. 10.9. ***

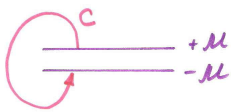

Рис. 10.10. ***

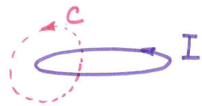

Рис. 10.11. ***

Вспомним теперь, что магнитный листок — воображаемый; на самом деле магнитное поле создается электрическим током I. Получаем, что работа магнитного поля по перемещению единичного магнитного полюса по замкнутому контуру C, охватывающему провод, равна (рис. 10.11)

$$\oint\limits_C (\overrightarrow{B} \cdot d\,\overrightarrow{l}\,) = 4\pi k_{\text{магн}} I. \qquad (10.6)$$

Направление контура C выбирается таким образом, чтобы наблюдатель, расположенный лицом к току, видел этот конутр обходящимся против часовой стрелки.

Поскольку левая часть соотношения (10.6) называется циркуляцией магнитного поля, соотношение (10.6) называется теоремой о циркуляции.

10.1.8. Магнитное поле прямого провода (расчет с помощью теоремы о циркуляции). Сила взаимодействия прямых проводов. Определение одного ампера через эту силу. Используя теорему о циркуляции, рассчитаем магнитное поле прямого провода и длинной катушки индуктивности.

Изобразим на рисунке направление магнитного поля прямого провода и выберем в качестве контура C окружность радиуса r, охватывающую проводник (рис. 10.12). По теореме о циркуляции,

$$B \cdot 2\pi r = 4\pi k_{\text{магн}} I \quad \Longleftrightarrow \quad B = \frac{4\pi k_{\text{магн}} I}{2\pi r} = \frac{2k_{\text{магн}} I}{r}. \qquad (10.7)$$

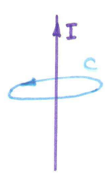

Рис. 10.12.
***

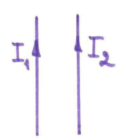

Рис. 10.13.
***

Соотношение (10.7) было получено экспериментально в опыте Био и Савара (1820).

Используя выражение (10.7), рассчитаем силу магнитного взаимодействия проводников длины l с токами I_1 и I_2, находящихся на расстоянии r ($r << l$) друг от друга (рис. 10.13).

Проводник с током I_1 создает на расстоянии r магнитное поле $B = \frac{2k_{\text{магн}} I_1}{r}$, которое действует на второй проводник с током I_2 с силой

$$F = I_2 B l = \frac{2k_{\text{магн}} I_1 I_2 l}{r}. \tag{10.8}$$

Соотношение (10.8) положено в основу еще одного определения одного ампера, которое в настоящее время является основным. Два проводника с током в 1 А, находящиеся на расстоянии 1 м друг от друга, притягиваются друг к другу с силой $2 \cdot 10^{-7}$ Н/м. Этот выбор одного ампера как раз и соответствует значению магнитной постоянной $k_{\text{магн}} = 10^{-7}\ \frac{\text{Н}}{\text{А}^2}$.

10.1.9. Магнитное поле длинной катушки индуктивности. В качестве еще одного применения теоремы о циркуляции рассчитаем индукцию B магнитного поля внутри длинной катушки индуктивности (длина l, площадь сечения S, число витков n), по которой течет ток с силой I (рис. 10.14).

В качестве контура интегрирования C выберем прямоугольник, частично проходящий внутри катушки индуктив-

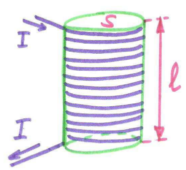

Рис. 10.14. ***

ности. По теореме о циркуляции,

$$Bl = 4\pi k_{\text{магн}} In \quad \Longleftrightarrow \quad B = \frac{4\pi k_{\text{магн}} In}{l}. \tag{10.9}$$

10.1.10. Сила взаимодействия проводника с током с магнитным полюсом. Магнитное поле элемента тока. Рассмотренный выше способ расчета магнитного поля контура с током заключался в замене контура с током на магнитный листок. Имеется еще один способ — сначала получить выражение для магнитного поля *элемента тока* — маленького незамкнутого проводника с током, а затем, разбив контур с током на малые элементы, рассчитать магнитное поле контура.

Найдем силу, с которой малый проводник с током длины l взаимодействует с магнитным полюсом $+\mathcal{M}$. Предположим, что проводник мал по сравнению с расстоянием r до магнитного полюса, а угол между направлением на магнитный полюс и направлением тока составляет α (рис. 10.15).

По аналогии с электростатикой, магнитный полюс создает в точке нахождения проводника магнитное поле

$$B = k_{\text{магн}} \frac{\mathcal{M}}{r^2},$$

направленное от полюса. По закону Ампера, это магнитное поле действует на проводник с током с силой

$$F = IBl\sin\alpha = k_{\text{магн}} \frac{Il\sin\alpha}{r^2} \mathcal{M}, \tag{10.10}$$

которая направлена в плоскости рисунка от нас.

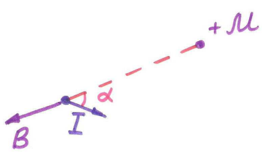

Рис. 10.15. ***

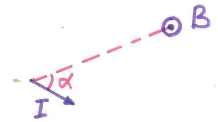

Рис. 10.16. ***

Поскольку для взаимодействия магнитного полюса с магнитным листком выполняется третий закон Ньютона, он выполнен и для взаимодействия магнитного полюса с *замкнутым* контуром тока. Поэтому при расчете силы, с которой замкнутый конутр тока действует на магнитный полюс, мы сможем разбить его на большое количество элементов тока, рассчитать силу, действующую на полюс со стороны элемента, по формуле (10.10), и просуммировать эти силы.

С учетом сказанного, магнитное поле элемента тока силой I длиной l на расстоянии r по величине равно (рис. 10.16)

$$B = k_{\text{магн}} \frac{Il\sin\alpha}{r^2}. \qquad (10.11)$$

Здесь α — угол между направлением тока и направлением на точку наблюдения. Магнитное поле перпендикулярно как направлению тока, так и направлению на точку наблюдения. При этом наблюдатель, на которого направлен вектор $\overrightarrow{B}$, должен видеть, что ток обходит точку наблюдения против часовой стрелки.

Соотношение (10.11) можно записать и в векторном виде, обозначив через $\overrightarrow{l}$ направленный вдоль тока вектор, равный по величине длине проводника, а через $\overrightarrow{r}$ — вектор, соединяющий проводник и точку наблюдения:

$$\overrightarrow{B} = k_{\text{магн}} I \frac{\left[\overrightarrow{l} \times \overrightarrow{r}\right]}{r^3}. \qquad (10.12)$$

Отметим, что понятие магнитного поля незамкнутого элемента тока вспомогательное [1]): оно используется только для того, чтобы путем интегрирования получить выражение для наблюдаемого на опыте магнитного поля замкнутого контура с током — и именно это следствие формулы

[1]) Именно поэтому способ расчета взаимодействия токов, основанный на формуле (10.12) не является единственно возможным

(10.12) можно проверить путем измерений. Непосредственно магнитное поле незамкнутого элемента тока наблюдать нельзя, так как электрический заряд не может исчезать на концах элемента.

10.1.11. Электродинамический опыт Вебера и Кольрауша (1856). Электродинамическая постоянная. Значение электростатической постоянной в системе СИ. Первоначально электростатические и магнитные явления изучались независимо друг от друга: в некоторых опытах измерялось электростатическое взаимодействие электрических зарядов, в некоторых — магнитное взаимодействие токов и магнитов.

Вебер и Кольрауш (1856) впервые провели опыт, в котором измерялись как электростатические, так и магнитные величины. В опыте проводилась разрядка конденсатора большой емкости через резистор большого сопротивления (рис. 10.17).

Электрический заряд q на конденсаторе в зависимости от времени измерялся по электростатическому взаимодействию пластин конденсатора (таким способом можно измерить величину $\sqrt{k_{\text{эл}}}\,q$, размерность которой $\sqrt{\text{Н}}\cdot\text{м}$), сила тока I через резистор — по магнитному взаимодействию (таким способом измеряется величина $\sqrt{k_{\text{магн}}}\,I$ с размерностью $\sqrt{\text{Н}}$). Тогда, согласно закону сохранения электрического заряда, изменение заряда на конденсаторе должно быть пропорционально произведению силы тока на прошедший промежуток времени Δt:

$$-\sqrt{k_{\text{эл}}}\,\Delta q = c_{\text{эл}}\sqrt{k_{\text{магн}}}\,I\Delta t.$$

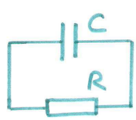

Рис. 10.17. ***

Коэффициент пропорциональности $c_{\text{эл}}$, называемый электродинамической постоянной, является фундаментальной характеристикой электромагнитных взаимодействий [1]. Размерность этого коэффициента — м/с.

Измерения показали, что

$$c_{\text{эл}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Электродинамическая постоянная совпала со скоростью света — так зародилась мысль об электромагнитной природе света.

Поскольку электростатическая и магнитная постоянная связаны друг с другом

$$k_{\text{эл}} = k_{\text{магн}} c_{\text{эл}}^2,$$

зафиксировав одну из постоянных, мы однозначно фиксируем и другую. Поскольку в системе СИ $k_{\text{магн}} = 10^{-7} \ \dfrac{\text{Н}}{\text{А}^2}$, электростатическая постоянная оказывается равной

$$k_{\text{эл}} = 10^{-7} \ \frac{\text{Н}}{\text{А}^2} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ м/с})^2 = 9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}.$$

§10.2. Электромагнитная индукция

10.2.1. Превращение энергии при изменении магнитного потока через контур с током. Явление электромагнитной индукции. Опыты Фарадея. Решение задач на движение проводников с током в магнитном поле. В контуре при изменении магнитного потока через него наводится ЭДС — этот факт был экспериментально обнаружен в опытах Фарадея (1830). Теоретически возникновение

---

[1] Мы можем путем выбора системы единиц обратить как электростатическую, так и магнитную постоянные по отдельности в единицу. Однако константа $c_{\text{эл}}$ во всех системах единиц одинакова

ЭДС было объяснено Гельмгольцем (1847) на основе закона сохранения и превращения энергии.

Пусть электрическая цепь, состоящая из конденсатора и резистора, помещена в магнитное поле (рис. 10.18).

Чтобы изменить[1] магнитный поток через контур на $\Delta\Phi_B$, требуется совершить работу

$$A = -I\Delta\Phi_B,$$

где I — сила тока в цепи. Эта работа идет на изменение энергии конденсатора

$$\Delta W = \Delta\left(\frac{q^2}{2C}\right) = \frac{q\Delta q}{C} = \frac{qI\Delta t}{C}$$

и передается окружающей среде (эффект Джоуля-Ленца) на резисторе в количестве $I^2R\Delta t$.

Согласно закону сохранения и превращения энергии,

$$-I\Delta\Phi_B = \frac{qI\Delta t}{C} + I^2R\Delta t \quad\Longleftrightarrow\quad -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{q}{C} + IR.$$

Данное соотношение совпадает с законом Ома для электрической цепи, если принять, что в контуре с изменяющимся магнитным потоком наводится ЭДС индукции, равная по ве-

[1]) путем перемещения контура, деформации контура, перемещения магнитов и т.д.

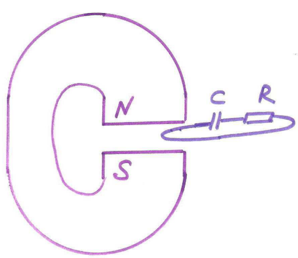

Рис. 10.18. ***

личине скорости изменения магнитного потока:

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}. \qquad (10.13)$$

Отметим, что возникающей в контуре индукционный ток положителен, если магнитный поток через контур уменьшается.

Это утверждение формулируется обычно в виде правила Ленца: направление индукционного тока таково, что этот ток стремится препятствовать изменению магнитного потока.

При решении задач на движение проводников с током в магнитном поле обычно записывают следующие уравнения:

- выражение для силы Ампера, действввующей на проводник с током;
- закон электромагнитной индукции (10.13);
- закон сохранения и превращения энергии.

Поскольку закон электромагнитной индукции является следствием закона сохранения и превращения энергии и закона Ампера (или формулы для работы), только два уравнения из трех являются независимыми. Эти два уравнения выбираются обычно из соображений удобства.

10.2.2. Самоиндукция. Индуктивность длинной катушки. Понятие о взаимной индукции. Трансформатор. Электрический ток, текущей по катушке, создает внутри катушки магнитное поле, а значит и магнитный поток Φ_B, пропорциональный силе тока I:

$$\Phi_B = LI.$$

Коэффициент пропорциональности L называется *индуктивностью* катушки.

Для расчета индуктивности катушки из n витков длины l площади поперечного сечения S воспользуемся выражением для магнитной индукции внутри такой катушки (10.9)

$B = \dfrac{4\pi k_{\text{магн}} I n}{l}$. Тогда

$$\Phi_B = \frac{4\pi k_{\text{магн}} I S n}{l} \quad \Longleftrightarrow \quad L = \frac{4\pi k_{\text{магн}} S n}{l}.$$

При изменении силы тока магнитный поток через катушку также изменяется на $d\Phi_B = L dI$ — наводится *ЭДС самоиндукции*

$$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}.$$

В задачах также встречаются системы катушек. Изменение электрического тока в одной из катушек приводит к изменению магнитного потока не только в этой катушке, но и в других катушках. Это явление называется взаимной индукцией.

Наиболее известным примером системы из двух катушек является трансформатор: две катушки намотаны на один сердечник, в результате чего магнитный поток через обе катушки [1] одинаков (рис. 10.19).

10.2.3. Превращение энергии в колебательном контуре. Энергия катушки индуктивности. Представление об энергии магнитного поля. Исследуем превращение энергии в колебательном контуре, состоящем из конденсатора емкости C, резистора сопротивлением R и катушки индуктивности L (рис. 10.20).

[1] а значит и ЭДС индукции в обоих катушках!

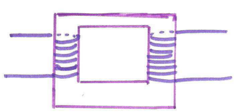

Рис. 10.19. ***

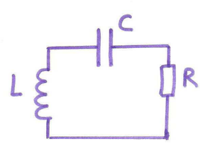

Рис. 10.20. ***

Изменение энергии конденсатора в таком контуре равно

$$dW_C = d\left(\frac{q^2}{2C}\right) = \frac{q}{C}dq = \frac{q}{C}Idt,$$

энергия, выделяющаяся на резисторе за время dt в соответствии с эффектом Джоуля-Ленца, равна

$$dW_R = I^2Rdt.$$

Общее изменение энергии без учета катушки индуктивности равно

$$dW_C + dW_R = \left(\frac{q}{C} + IR\right)Idt.$$

Запишем для данного контура закон Ома с учетом ЭДС самоиндукции:

$$-L\frac{dI}{dt} = \frac{q}{C} + IR;$$

тогда

$$dW_C + dW_R = -L\frac{dI}{dt}Idt = -LIdI.$$

Если считать закон сохранения и превращения энергии справедливым и для электрических цепей с индуктивностью, следует принять, что катушка индуктивности с током I также обладает энергией, изменение которой при изменении тока I равно

$$dW_L = LIdI \quad \Longleftrightarrow \quad W_L = \frac{LI^2}{2} + \text{const}.$$

Принимая энергию катушки при отсутствии тока равной нулю, получим:

$$W_L = \frac{LI^2}{2}.$$

Выразим энергию катушки индуктивности через магнитное поле B внутри нее.

Выразим силу электрического тока из соотношения (10.9): $I = \frac{Bl}{4\pi k_{\text{магн}} n}$. Тогда

$$W_L = \frac{I\Phi_B}{2} = \frac{IBnS}{2} = \frac{BnS}{2} \cdot \frac{Bl}{4\pi k_{\text{магн}} n} = \frac{B^2}{8\pi k_{\text{магн}}}Sl.$$

Таким образом, объемная плотность энергии оказывается равной $\dfrac{B^2}{8\pi k_{\text{магн}}}$ и зависящей только от индукции магнитного поля. Так возникла идея о том, что энергия не только конденсатора, но и катушки индуктивности заключена в электромагнитном поле.

10.2.4. Свободные колебания в контуре, состоящем из конденсатора и катушки индуктивности. Частота колебаний. Рассмотрим колебательный контур, состоящий из конденсатора и катушки индуктивности (рис. 10.21).

Оказывается, что заряд на конденсаторе в таком контуре колеблется по гармоническому закону:

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \tag{10.14}$$

Убедиться в этом можно двумя способами:

- показав, что уменьшение энергии конденсатора при колебании по закону (10.14) по сравнению с максимальным значением равно $LI^2/2$;
- показав, что закон изменения заряда (10.14) удовлетворяет закону Ома для данной цепи.

Исследуем сначала превращение энергии.

Сила тока в цепи равна

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0\omega \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Следовательно, уменьшение энергии конденсатора по сравнению с максимальным значением при колебаниях составляет

$$\frac{q_0^2 - q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C}\sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{I^2}{2C\omega^2}.$$

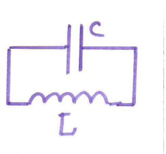

Рис. 10.21. ***

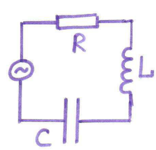

Рис. 10.22. ***

Если

$$L = \frac{1}{C\omega^2} \quad \Longleftrightarrow \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \tag{10.15}$$

то уменьшение энергии конденсатора в точности компенсируется увеличением энергии катушки индуктивности.

Покажем, что при колебаниях (10.14) выполняется закон Ома.

Рассчитаем ЭДС самоиндукции на катушке индуктивности:

$$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt} = Lq_0\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = L\omega^2 q.$$

При условии (10.15) ЭДС самоиндукции совпадает с напряжением на конденсаторе.

10.2.5. Вынужденные колебания в контуре, состоящем из источника переменного напряжения, резистора, конденсатора и катушки. Понятие о резонансе. Чтобы в цепи, включающей резистор, возникли гармонические колебания, в цепь надо включить источник переменного напряжения (рис. 10.22).

Исследуем, как должно зависеть напряжение источника от времени, чтобы в контуре, включающем резистор сопротивления R, конденсатор емкости C и катушку индуктивности L сила тока испытывала гармонические колебания:

$$I(t) = I_0\sin\omega t.$$

Поскольку заряд на конденсаторе удовлетворяет соотношению

$$\frac{dq}{dt} = I = I_0\sin\omega t,$$

с точностью до добавления константы имеем

$$q(t) = -\frac{I_0}{\omega}\cos\omega t.$$

Для ЭДС самоиндукции на катушке индуктивности запишем:

$$-L\frac{dI}{dt} = -L\omega I_0\cos\omega t.$$

Найдем напряжение источника:

$$U(t) = \frac{q}{C} + IR + L\frac{dI}{dt} = I_0\left(-\frac{1}{\omega C} + \omega L\right)\cos\omega t + I_0 R\sin\omega t.$$

Линейную комбинацию синуса и косинуса удобно преобразовать, введя обозначение

$$R = R_0\cos\varphi, \qquad \left(-\frac{1}{\omega C} + \omega L\right) = R_0\sin\varphi,$$

где

$$R_0 = \sqrt{R^2 + \left(-\frac{1}{\omega C} + \omega L\right)^2}.$$

Тогда

$$U(t) = I_0 R_0(\sin\omega t\cos\varphi + \cos\omega t\sin\varphi) = I_0 R_0\sin(\omega t + \varphi).$$

Таким образом, напряжение источника должно колебаться по гармоническому закону с амплитудой $I_0 R_0$ и фазой, сдвинутой на φ по сравнению с колебаниями силы тока.

Отметим, что минимально необходимая для поддержания колебаний силы тока с амплитудой I_0 амплитуда напряжения равна $I_0 R$. Этот минимум достигается при частоте (10.15). Если амплитуда колебаний напряжения на источнике постоянна, при частоте (10.15) будут наблюдаться колебания силы тока в цепи с максимально возможной амплитудой — это явление называется резонансом.

§10.3. Понятие о системе уравнений Максвелла

10.3.1. Интерпретация закона электромагнитной индукции с точки зрения представлений о вихревом электрическом поле. Размышляя над явлением электромагнитной индукции, Максвелл дал следующую интерпретацию опытам Фарадея и закону (10.13). Наличие ЭДС индукции означает, что при переносе электрического заряда по замкнутому контуру действующая на заряд сила совершает отличную от нуля работу. Эта сила связана с электрическим полем, поэтому соотношение (10.13) представляется как

$$\oint\limits_C (\vec{E} \cdot d\,\vec{l}\,) = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \tag{10.16}$$

Поле, возникающее из-за переменного магнитного поля, было названо *вихревым электрическим полем*.

10.3.2. Ток смещения. Понятие о системе уравнений Максвелла. Размышляя над применимостью теоремы о циркуляции магнитного поля для переменных токов, Максвелл обратил внимание на следующий парадокс. Рассмотрим переменный ток I, заряжающий конденсатор (рис. 10.23).

В соответствии с теоремой о циркуляции (10.6), циркуляция магнитного поля по контуру, плоскость которого пересекает проводник, пропорциональна силе тока I. Если же плоскость контура проходит между обкладками конденсатора, то теорема о циркуляции предсказывает отсутствие магнитного поля.

Поскольку магнитное поле не должно так резко прерываться в пространстве, Максвелл предложил модифицировать теорему о циркуляции для переменных токов. По предположению Максвелла, магнитное поле может создаваться не только токами, но и переменным электрическим полем. Действительно, если плоскость контура проходит между обкладками конденсатора, ток через него не проходит, но зато изменяется поток электрического поля Φ_E, выражающийся по теореме Гаусса через заряд q конденсатора как $4\pi k_{\text{эл}} q$.

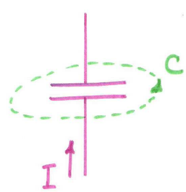

Рис. 10.23. ***

При этом сила тока через провод пропорциональна скорости изменения электрического потока через конденсатор:

$$I = \frac{1}{4\pi k_{\text{эл}}} \frac{d\Phi_E}{dt}.$$

Поэтому Максвелл предположил, что как сила тока I, так и скорость изменения электрического потока, умноженная на $\frac{1}{4\pi k_{\text{эл}}}$ могут в равной степени являться источниками магнитного поля. В данный предположениях теорема о циркуляции принимает вид

$$\oint_C (\overrightarrow{B} \cdot d\,\overrightarrow{l}) = 4\pi k_{\text{магн}} \left(I + \frac{1}{4\pi k_{\text{эл}}} \frac{d\Phi_E}{dt} \right). \tag{10.17}$$

Величина $\frac{1}{4\pi k_{\text{эл}}} \frac{d\Phi_E}{dt}$ называется *током смещения.*

Для постоянных токов новое уравнение Максвелла (10.17) полностью совпадает с известной ранее теоремой о циркуляции; в то же время, парадокса с конденсатором при использовании гипотезы (10.17) не возникает.

Окончательно Максвелл записал систему из четырех уравнений, описывающих электромагнитное поле. Два уравнения — это соотношения (10.16) и (10.17). Еще два уравнения Максвелла — это соотношения для магнитных потоков:

$$\Phi_E = 4\pi k_{\text{эл}} Q \text{ через замкнутую поверхность;}$$
$$\Phi_B = 0 \text{ через замкнутую поверхность.}$$

Первое из соотношений — теорема Гаусса, согласно которой поток напряженности электрического поля через замкнутую поверхность пропорционален электрическому заряду внутри этой поверхности. Согласно второму соотношению, магнитный поток через любую замкнутую поверхность равен нулю. Это соотношение основано на следующем опытном факте: изолированные магнитные полюса получить никому не удалось, поэтому и магнитный заряд внутри любой замкнутой поверхности обращается в нуль.

Система уравнений Максвелла позволяет полностью описать электромагнитные явления.

§10.4. Движение частиц в электромагнитных полях

10.4.1. Сила Лоренца, действующая на электрон в магнитном поле (связь с силой Ампера). Развивая электронную теорию, Лоренц на рубеже XIX- XX веков дал следующую интерпретацию силе Ампера: на каждый движущийся заряд в проводнике со стороны магнитного поля действует сила; эти силы складываются — возникает сила Ампера.

Найдем выражение для силы Лоренца, действующей в магнитном поле B на движущийся со скоростью v заряд q.

Рассмотрим проводник длины l и площади поперечного сечения S, вдоль которого со скоростью v движутся частицы заряда q, имеющие концентрацию n (рис. 10.24). За время Δt поперечную площадку пересекает количество частиц $nSv\Delta t$ и заряд $q \cdot nSv\Delta t$. Сила тока в таком проводнике равна $I = qnSv$, а действующая на проводник сила Ампера равна по величине

$$F_{\text{А}} = IB_{\perp}l = qnSlvB_{\perp}.$$

Поскольку общее число частиц в проводнике равно nSl, на каждую частицу действует сила Лоренца

$$F_{\text{Л}} = qvB_{\perp}.$$

Она направлена перпендикулярно как направлению скорости частицы, так и направлению магнитного поля.

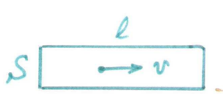

Рис. 10.24. ***

В векторном виде выражение для силы Лоренца можно записать следующим образом:

$$\overrightarrow{F}_{\text{Л}} = q\left[\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}\right].$$

10.4.2. Электромагнитная индукция в движущемся проводнике (микроскопическое объяснение). Используя электронную теорию Лоренца, можно дать микроскопическое объяснение явлению электромагнитной индукции в движущемся проводнике.

Пусть проводник движется со скоростью v в плоскости, перпендикулярной магнитному полю B. Тогда на носители заряда со стороны магнитного поля будет действовать сила Лоренца, равная qvB. При отсутствии тока либо при малом сопротивлении проводника эта сила должна уравновешиваться электрической силой qE. Таким образом, в движущемся проводнике возникает электрическое поле $E = vB$, которое и приводит к возникновению ЭДС индукции (рис. 10.25).

10.4.3. Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле. Исследуем движение частицы заряда q в однородном магнитном поле B, направленном вдоль оси z. Поскольку действующая на частицу сила Лоренца направлена перпендикулярно магнитному полю, скорость частицы вдоль оси z остается неизменной. Мы можем перейти в систему отсчета, движущуюся с этой скоростью вдоль оси z — и рассматривать движение частицы только в плоскости xy.

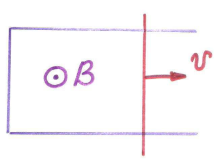

Рис. 10.25. ***

Поскольку сила Лоренца не совершает работы, кинетическая энергия частицы и ее модуль скорости остаются неизменными. Ускорение частицы также является постоянным

$$a = \frac{qvB}{m}$$

и направленным перпендикулярно скорости. Такая зависимость ускорения от скорости соответствует движению по окружности, радиус которой определяется из соотношения

$$a = \frac{v^2}{R} \quad \Longleftrightarrow \quad R = \frac{mv}{qB}.$$