Глава 1

ОТ ПРОСТЫХ МЕХАНИЗМОВ К ЗАКОНАМ СТАТИКИ И ГИДРОСТАТИКИ

§1.1. Масса и плотность, работа и потенциальная энергия. Центр масс

1.1.1. Масса как мера притяжения тела к Земле. Взвешивание как древнейший способ определения массы. Плотность. Важнейшей характеристикой любого материального тела является масса. Измерить массу тела — значит сравнить ее с некоторым эталоном массы и определить, во сколько раз масса тела больше массы эталона.

Способ измерения массы («взвешивание») известен со времен глубокой древности. Берется достаточно легкий жесткий стержень, который закрепляется посередине. К концам стержня прикрепляются грузы, массы которых сравниваются. Стержень отпускают — он приходит в движение; при этом груз с большей массой опускается, с меньшей массой — поднимается (рис. 1.1). [1)]

[1)] При наличии трения в оси вращения стержень может оставаться в покое и при различных массах на концах. Здесь мы считаем, что трением можно пренебречь.

Как показывает рассматриваемый способ измерения, масса является мерой притяжения тел к Земле: тело, притягивающееся к Земле сильнее, имеет большую массу. [1)]

В качестве единицы измерения массы принят килограмм (1 кг). Первоначально килограммом называли массу воды, занимающей куб с длиной ребра 1 дм (объем 1 дм^3); затем — массу хранящегося в Париже эталона. Для практических измерений можно *приближенно* считать, что килограмм равен массе 1 дм^3 воды при нормальных условиях. Объем, соответствующий килограмму воды, также называют литром.

Важнейшей характеристикой вещества является *плотность* ρ — масса, содержащаяся в единице объема вещества. Тело объема V, изготовленное из вещества плотности ρ, имеет массу ρV.

Плотность можно измерять в кг/м^3, г/см^3 и т.д.

1.1.2. Конструкции механизмов, поднимающих одну систему грузов за счет опускания другой системы грузов. Понятие о полезной работе механизма, единицы измерения работы. Важнейшие практические применения механики относятся к объяснению работы простых механизмов — устройств, позволяющих поднимать одни грузы за счет опускания других.

Простейший пример механизма уже был рассмотрен в предыдущем пункте: более массивный груз, подвешенный к одной чаше весов, опускаясь, поднимал груз меньшей массы на другой чаше.

[1)] В дальнейшем мы познакомимся и с иной интерпретацией понятия массы.

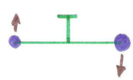

Рис. 1.1. ***

Как можно количественно выразить "полезность"механизма? Поскольку назначение механизма — поднимать массивные грузы на некоторую высоту, мера полезности механизма (*полезная работа*) должна быть пропорциональна как массе перемещаемого груза m, так и высоте h, на которую поднимается этот груз.

Полезную работу можно выражать с помощью различных единиц измерения. Работа по подъему груза массой 1 кг на 1 м обозначается как 1 кгс · м (один килограмм-силы-метр). Помимо 1 кгс · м, работу можно измерять в *джоулях*: 1 кгс · м равен примерно [1] 10 Дж.

1.1.3. Полезная и затраченная работа, соотношение между ними. Коэффициент полезного действия (КПД) механизма. Если ввести обозначение [2]

$$g = 1\frac{\text{кгс}}{\text{кг}} \simeq 10\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{м}},$$

то выражение для полезной работы $A_{\text{полезн}}$ по подъему груза массы m на высоту h примет вид:

$$A_{\text{полезн}} = mgh.$$

Если механизм поднимает несколько грузов, полезные работы по перемещению грузов *складываются*.

Подъем грузов с помощью механизмов может осуществляться только за счет какой-либо компенсации, например спуска других грузов. По аналогии с полезной работой, можно ввести понятие *затраченной работы*. Если при работе механизма груз массой M перемещается на расстояние H вниз, будем считать затраченную работу равной

$$A_{\text{затр}} = MgH.$$

[1] Более точное соотношение: 1 кгс · м $\simeq 9,8$ Дж

[2] Величина g имеет смысл напряженности гравитационного поля Земли: в состоянии невесомости для подъема груза работу совершать не требуется!

Если при работе механизма опускаются несколько грузов, затраченные работы будем складывать.

При использовании рычажных весов в качестве механизма менее массивный груз поднимается, а более массивный опускается — полезная работа оказывается меньше затраченной:

$$A_{\text{полезн}} < A_{\text{затр}}. \tag{1.1}$$

Как показано ниже, именно это неравенство позволяет предсказать, возможна ли конструкция того или иного механизма. Эффективность механизма можно количественно выразить с помощью *коэффициента полезного действия* (КПД) — отношения полезной работы к затраченной:

$$\text{КПД} = \frac{A_{\text{полезн}}}{A_{\text{затр}}}.$$

Отметим, что механизм, затрачивающий заданную работу, может совершить полезную работу *разными способами.*

Какие грузы и на какую высоту может поднять механизм, затрачивающий $4,004$ кгс $\cdot$ м работы (опуская две гири общей массой 2,002 кг на 2 м)? Можно предложить следующие примеры:

- Положив две гири на одну чашу весов и груз 2 кг на другую, добьемся, чтобы при спуске гирь на 2 м груз 2 кг поднимался на 2 м.
- Сначала, опустив две гири на 1 м, поднимем описанным способом груз 2 кг на 1 м, затем, опустив гири еще на 1 м, — *другой* груз 2 кг на 1 м. В результате два груза по 2 кг (=один груз 4 кг) поднимутся на 1 м.
- Опустив одну гирю 1,001 кг на 2 м, поднимем груз 1 кг на 2 м; затем, опустив другую гирю на 2 м, поднимем *этот же* груз 1 кг еще на 2 м; — в итоге груз 1 кг поднимается на 4 м.

Следовательно, затратив заданным способом работу $4,004$ кгс $\cdot$ м, можно совершить полезную работу 4 кгс $\cdot$ м *любым способом по выбору*, подняв или груз 2 кг на 2 м, или груз 4 кг на 1 м, или груз 1 кг на 4 м.

1.1.4. Роль вечных двигателей в становлении физики. Невозможность простых механизмов, совершающих полезную работу, большую затраченной. С давних времен человечество пыталось изобрести вечный двигатель — устройство, совершающее полезную работу без затраченной. Тот факт, что вечный двигатель так и не воплощен в практику, является важным доводом в пользу принципиальной невозможности таких устройств. Используя данный постулат, можно установить и другие законы физики в качестве следствий.

Если бы удалось сконструировать механизм, совершающий полезную работу, большую затраченной, можно было бы построить и вечный двигатель: в этом случае часть полезной работы можно было бы использовать для компенсации затраченной и возвращений опущенных грузов в исходные положения.

1.1.5. Потенциальная энергия, ее убывание при работе простых механизмов. Минимальность потенциальной энергии в состоянии устойчивого равновесия. Неравенство (1.1), связывающее полезную и затраченную работу, можно привести к виду принципа убывания потенциальной энергии при работе простых механизмов.

Направим координатную ось z вертикально вверх; зафиксируем начало координат. Будем говорить, что потенциальная энергия груза массы m в точке с координатой z равна $W = mgz$; потенциальная энергия системы грузов складывается из потенциальных энергий отдельных грузов.

Пусть механизм, поднимая грузы, совершает работу $A_{\text{полезн}}$, а опуская грузы, затрачивает работу $A_{\text{затр}}$. Тогда потенциальная энергия поднимаемых грузов увеличивается на $A_{\text{полезн}}$, а потенциальная энергия спускаемых — уменьшается на $A_{\text{затр}}$. Следовательно, общее изменение потенциальной энергии, равное разности конечной энергии $W_{\text{кон}}$ и начальной энергии $W_{\text{нач}}$, равно разности полезной и затраченной работ:

$$W_{\text{кон}} - W_{\text{нач}} = A_{\text{полезн}} - A_{\text{затр}}.$$

Согласно неравенству (1.1), механизм может быть сконструирован только при

$$W_{\text{кон}} < W_{\text{нач}}$$

(потенциальная энергия при работе механизма должна убывать).

Если в некотором состоянии потенциальная энергия системы принимает наименьшее возможное значение, то система в таком состоянии будет находиться в устойчивом равновесии: выход из этого состояния будет противоречить принципу убывания потенциальной энергии (=невозможности вечных двигателей).

1.1.6. Координаты центра масс системы грузов. Потенциальная энергия системы грузов с заданным положением центра масс. Уменьшение высоты центра масс при работе простых механизмов. Принцип Торричелли о минимуме высоты центра масс. Какую точку следует считать центром масс системы? Если система состоит из n одинаковых грузов, координатой центра z_c естественно считать среднее арифметическое координат грузов:

$$z_c = \frac{z_1 + z_2 + ... + z_n}{n}.$$

Как обобщить данное соотношение для грузов разной массы? Пусть груз 2 кг находится в точке с координатой z_1, груз 3 кг — в точке с координатой z_2. Можно представить, что имеются *два* груза 1 кг в точке z_1 и *три* груза 1 кг в точке z_2 — всего пять грузов. Тогда координата центра масс системы оказывается равной

$$z_c = \frac{z_1 + z_1 + z_2 + z_2 + z_2}{5} = \frac{2z_1 + 3z_2}{5}.$$

В общем случае центр масс системы грузов с массами m_1, m_2, ..., находящихся в точках z_1, z_2, ..., расположен в точке с координатой

$$z_c = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + ...}{m_1 + m_2 + ...}.$$

Аналогично рассчитываются и x- и y-координаты центра масс системы грузов.

Потенциальная энергия системы грузов может быть выражена через высоту центра масс системы:

$$W = m_1 g z_1 + m_2 g z_2 + ... = g(m_1 + m_2 + ...) z_c = M g z_c,$$

здесь $M = m_1 + m_2 + ...$ — общая масса системы.

Поскольку при работе простых механизмов потенциальная энергия уменьшается, должна уменьшается и z-координата центра масс. При этом в состоянии устойчивого равновесия центр масс занимает *наинизшее возможное положение*. Этот принцип был впервые отмечен Торричелли в середине XVII века и использован Паскалем для решения задач гидростатики.

Принцип Торричелли применим к системам с рычагами, блоками и жидкостями при отсутствии трения и неприменим к задачам с пружинами, электрическими зарядами, трением, которые во времена Торричелли даже не ставились.

1.1.7. Экспериментальное определение центра масс плоской фигуры. Методы расчета положения центра масс плоской фигуры (использование симметрии, замена подсистемы масс точечной массой). Задачи на опрокидывание. Частный случай принципа Торричелли был известен еще Архимеду: если подвесить плоскую фигуру за какую-либо точку, фигура примет положение, при котором ее центр масс будет находиться точно под точкой подвеса (прямая, соединяющая центр масс и точку подвеса, вертикальна). В частности, если плоскую фигуру подвесить за центр масс, она будет находиться в состоянии безразличного равновесия.

Наблюдение Архимеда лежит в основе экспериментального метода определения положения центра масс: подвесив фигуру последовательно за две точки, можно начертить на ней две прямые, на каждой из которых должен лежать центр масс фигуры; их пересечение и дает центр масс. Подвесив фигуру за любую другую точку, можно убедиться, что уже найденный центр масс фигуры будет находиться под точкой подвеса, — тем самым теория приводит к предсказанию, которое можно сравнивать с экспериментальными данными.

Чтобы рассчитать центр масс плоской фигуры теоретически, можно использовать следующие соображения:

- центр масс плоской фигуры, имеющей центр симметрии, находится в этом центре (центр масс однородного стержня находится в его середине, центр масс однородного прямоугольника — в точке пересечения его диагоналей, центр масс круга — в его центре);
- при расчете положения центра масс любую подсистему грузов можно заменить точкой, расположенной в центре подсистемы, с массой, равной массе подсистемы.

Понятие центра масс можно использовать при решении задач статики на опрокидывание доски, выдвинутой частично за край стола: доска будет опрокидываться, если при этом положение ее центра масс будет понижаться.

§1.2. Условия равновесия в простейших системах

1.2.1. Примеры равновесия в системах с неподвижными и подвижными блоками. Используя принцип минимума потенциальной энергии (минимума высоты центра масс) или неравенство для полезной и затраченной работы, можно определить, какие процессы в тех или иных системах возможны, какие — невозможны. Исходя из данных соображений, можно определять, в каком случае система будет находиться в равновесии.

В качестве первого примера рассмотрим систему из двух грузов, соединенных нитью, перекинутой через блок (рис. 1.2).

Обозначим массу груза 1 через m_1, массу груза 2 — через m_2. Исследуем, возможен ли процесс, при котором груз 1 опускается, а груз 2 поднимается.

> Пусть груз 1 опустился на h; тогда, поскольку длина нити постоянна, груз 2 поднялся на h. Полезная работа по подъему груза 2 равна m_2gh, затраченная — равна m_1gh. Поскольку полезная работа должна быть меньше затраченной, рассматриваемый процесс возможен при $m_2 < m_1$.

Таким образом, груз 1 может опускаться в данной системе, только если $m_1 > m_2$. Аналогично рассуждая, получаем, что груз 2 может опускаться только при $m_2 > m_1$. Следовательно, равновесие в системе будет достигаться при $m_1 = m_2$.

В качестве второго примера рассмотрим систему, состоящую из двух грузов 1 и 2, неподвижного и подвижного блоков и нити (рис. 1.3).

Обозначим, как и в предыдущем примере, массы грузов 1 и 2 через m_1 и m_2 соответственно. Исследуем, в каком направлении могут двигаться грузы.

> Пусть груз 1 опустился на h_1, а груз 2 поднялся на h_2 (рис. 1.4). Тогда длины отдельных участков нити, перекинутой через подвижный блок, изменятся на $+h_1$, $-h_2$,

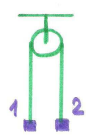

Рис. 1.2. ***

$-h_2$. Поскольку общая длина нити неизменна, имеем: $h_1 = 2h_2$.

Полезная работа по подъему груза 2 равна m_2gh_2, затраченная — равна $m_1gh_1 = 2m_1gh_2$. Поскольку полезная работа должна быть меньше затраченной, рассматриваемый процесс возможен при $m_2 < 2m_1$.

Аналогично рассуждая, получаем, что груз 2 может опускаться только при $m_2 > 2m_1$.

Таким образом, равновесие в системе будет достигаться при $m_2 = 2m_1$.

1.2.2. Равновесие рычага с грузами. Рассмотрим легкий рычаг, закрепленный в точке О, к концам которого на расстояниях l_1 и l_2 от оси вращения О прикреплены грузы 1 и 2 массами m_1 и m_2 соответственно (рис. 1.5).

Исследуем возможное направление вращения системы.

Пусть рычаг повернулся на малый угол φ таким образом, что первый груз опустился на $l_1\varphi$, а второй поднялся на $l_2\varphi$ (рис. 1.6). Тогда полезная работа по подъему второго груза будет равна $m_2gl_2\varphi$, а затраченная по спуску первого груза — равна $m_1gl_1\varphi$. Рассматриваемый процесс возможен, если полезная работа меньше затраченной, то есть при $m_2l_2 < m_1l_1$.

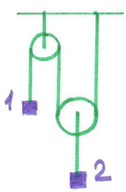

Рис. 1.3. ***

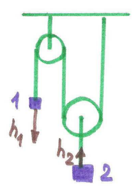

Рис. 1.4. ***

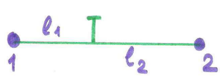

Рис. 1.5. ***

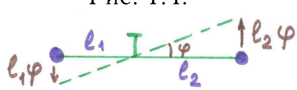

Рис. 1.6. ***

Аналогично получаем, что при $m_1 l_1 > m_2 l_2$ груз 1 будет опускаться, груз 2 — подниматься.

Таким образом, рычаг с грузами будет находиться в равновесии при $m_1 l_1 = m_2 l_2$.

1.2.3. Равновесие грузов на наклонной плоскости. Рассмотрим изображенную на рисунке систему грузов: один, массой M, — на наклонной плоскости с углом наклона α, другой, массой m, подвешен к перекинутой через блок нити, связанной с первым грузом (рис. 1.7).

Исследуем возможное направление движение системы грузов.

Пусть первый груз сместился вдоль наклонной плоскости вверх на расстояние l; тогда второй груз опустился на расстояние l вниз (рис. 1.8).

Поскольку высота первого груза увеличилась на $l \sin \alpha$, полезная работа механизма равна $Mgl \sin \alpha$. Работа, затраченная за счет опускания второго груза, равна mgl. Рассматриваемый процесс возможен, если полезная работа меньше затраченной, то есть при $M \sin \alpha < m$.

Рассуждая аналогично, получаем, что обратный процесс возможен при $M \sin \alpha > m$.

Таким образом, грузы в рассматриваемой системе будут в равновесии при $M \sin \alpha = m$.

§1.3. Понятие о силе и моменте силы в статике

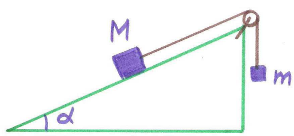

Рис. 1.7. ***

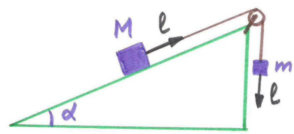

Рис. 1.8. ***

1.3.1. Понятие о силе в статике. Силы тяжести и натяжения нити. Единицы измерения силы (килограмм-силы и ньютон). Условие компенсации сил (на примерах). Решение задач на равновесие в системах с блоками при помощи сил. Задачи на равновесие механических систем можно решать различными способами. Выше мы рассматривали метод, основанный на исследовании малых перемещений грузов и сравнении полезной и затраченной работ. Еще один подход основан на использовании понятия *силы*.

Поскольку всякое массивное тело притягивается к Земле, примем, что на тело массой m действует *сила тяжести mg, направленная вниз*.

Поскольку $g = 1\frac{\text{кгс}}{\text{кг}} \simeq 10\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{м}}$, на тело массой 1 кг действует сила тяжести, равная 1 кгс = 10 Дж/м. Единица измерения 1 Дж/м также называется *ньютоном*.

Если подвешенный на нити груз массой m находится в равновесии, примем, что на него, помимо направленной вниз силы тяжести mg, действует и *направленная вдоль нити* сила натяжения нити T, равная по величине mg и компенсирующая поэтому действие силы тяжести.

Исследуем с помощью понятия силы равновесие в различных механических системах.

Начнем с системы двух грузов, связанных перекинутой через неподвижный блок нитью (рис. 1.9).

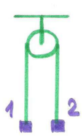

Рис. 1.9. ***

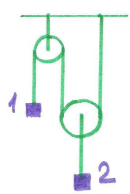

Рис. 1.10. ***

Система находится в равновесии, если массы обоих грузов одинаковы (обозначим их через m). Тогда сила натяжения нити, действующая на каждый из грузов, равна по величине mg, — сила натяжения *одинакова на всех участках нити.*

В качестве второго примера рассмотрим систему из неподвижного и подвижного блока и грузов (рис. 1.10).

Система находится в равновесии, если масса груза 1 вдвое меньше массы груза 2 (обозначим массы через m и $2m$). Тогда прикрепленная к грузу 1 и перекинутая через два блока нить натянута с силой $T_1 = mg$, прикрепленная к грузу 2 нить — с силой $T_2 = 2mg = 2T_1$.

На подвижный блок действуют сверху две силы натяжения нитей T_1 и T_1, снизу — вдвое большая сила натяжения нити T_2. Следовательно, три силы, приложенные к подвижному блоку, *компенсируются.*

В общем случае свойство компенсации *лежащих на одной прямой* сил, приложенных к телу, можно сформулировать следующим образом: *сумма приложенных к телу сил, действующих в одном направлении, равна сумме приложенных к телу сил, действующих в противоположном направлении.*

1.3.2. Понятие о моменте силы. Условие равновесия рычага (на примере). Правило моментов. Как записать правило рычага с точки зрения представления о силах?

Рассмотрим легкий рычаг, закрепленный в точке O, к которому с разных сторон от точки O на расстояниях l_1 и l_2 прикреплены грузы 1 и 2 с массами m_1 и m_2 соответственно. Поскольку к рычагу с грузами приложены силы m_1g и m_2g на расстояниях от оси l_1 и l_2, условие равновесия $m_1gl_1 = m_2gl_2$ можно проинтерпретировать следующим образом (рис. 1.11).

Будем говорить, что сила m_1g, приложенная на расстоянии l_1 от оси вращения, создает *момент силы* m_1gl_1, вращающий рычаг против часовой стрелки [1]); сила m_2g на расстоянии l_2 от оси — момент силы m_2gl_2, вращающий рычаг по часовой стрелке. При этом справедливо *правило моментов*: сумма моментов сил, вращающих систему против часовой стрелки, равна сумме моментов сил, вращающих систему по часовой стрелке.

1.3.3. Задача Архимеда о стержне, подвешенном за концы. Применим правило моментов к решению задачи Архимеда о стержне, подвешенном за концы.

Пусть на легком стержне A_1A_2 на расстоянии l_1 от конца A_1 и на расстоянии l_2 от конца A_2 закреплен груз массой M. Стержень подвешен за концы. Требуется определить силы натяжения нитей T_1 и T_2, приложенных в точках A_1 и A_2 (рис. 1.12).

Запишем правило моментов, выбрав в качестве оси вращения точку A_1. Сила натяжения T_1, приложенная в точке A_1, не создает никакого момента силы (не вращает стержень ни в одну из сторон). Сила натяжения T_2 создает момент силы $T_2(l_1 + l_2)$, вращающий стержень против часовой стрелки. Сила тяжести Mg создает момент силы Mgl_1, вращающий стержень по часовой стрелке. Согласно правилу моментов,

$$T_2(l_1 + l_2) = Mgl_1 \quad \Longleftrightarrow \quad T_2 = \frac{Mgl_1}{l_1 + l_2}.$$

[1]) Мы рассматриваем только случай, когда сила *перпендикулярна* отрезку, соединяющему точку приложения силы с осью вращения

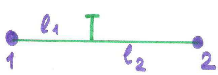

Рис. 1.11. ***

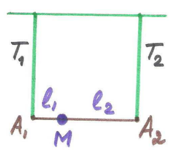

Рис. 1.12. ***

Рассматривая в качестве оси вращения точку A_2, придем по аналогии к соотношению:

$$T_1(l_1 + l_2) = Mgl_2 \quad \Longleftrightarrow \quad T_1 = \frac{Mgl_2}{l_1 + l_2}.$$

Отметим, что соотношение

$$T_1 + T_2 = Mg,$$

выражающее принцип компенсации сил, оказывается следствием двух правил моментов и не приводит к независимому уравнению.

§1.4. Гидростатика

1.4.1. Сохранение объема жидкости. Метод Архимеда измерения объема тела. Понятие плотности. Как показывает опыт, агрегатные состояния вещества отличаются друг от друга свойствами сохранения объема и формы: газы занимают весь предоставленный им объем, жидкость сохраняет объем, но свободно меняет свою форму, твердые тела сохраняют объем и форму. [1]

Свойство сохранения объема жидкости было использовано Архимедом для измерения объемов тел сложной формы. Метод Архимеда [2] заключается в следующем: сначала измеряется начальный объем воды в стакане, равный произведению площади основания стакана S на начальную высоту уровня воды h_0. Далее в воду кладется тело, объем которого нужно измерить (предполагается, что тело тонет в воде). Определяется суммарный объем воды и тела как про-

[1] Более точные опыты показывают, что свойство сохранения объемов жидкостей и твердых тел все-таки является приближенным; однако для изменения объема жидкости или твердого тела надо приложить усилия, значительно большие, чем для сжатия газа.

[2] По известной легенде, именно его придумал Архимед, лежа в ванне!

изведение площади основания стакана S на конечную высоту уровня воды h. Отсюда можно найти объем тела, равный разности $Sh - Sh_0$.

1.4.2. Сила, действующая на погруженное в жидкость тело (рассуждение Архимеда). Условие плавания тела в жидкости (неравенство для плотности, объем погруженной части). Задача о теле, погруженном в жидкость, была впервые рассмотрена Архимедом. Воспроизведем рассуждение Архимеда.

Пусть в жидкости плотностью ρ_0 выделен объем V. Сила тяжести, действующая на выделенный объем, равна $\rho_0 V g$ и направлена вниз. Этот объем находится в равновесии; следовательно, данная сила должна уравновешиваться другой силой, действующей со стороны жидкости, направленной вверх, равной по величине $\rho_0 g V$ и приложенной к центру масс объема V (рис. 1.13).

Сила, действующая со стороны жидкости на выделенный в жидкости объем V, не относится ни к одному из рассмотренных ранее видов сил. Эту силу называют *силой Архимеда*. Она действует со стороны жидкости на объем V как в случае, когда объем заполнен жидкостью, *так и в случае, когда в этом объеме находится иное тело*.

Таким образом, на тело объема V, полностью погруженное в жидкость плотности ρ_0, действует направленная вверх сила, равная по величине $\rho_0 g V$. Эта сила приложена к центру объема (чтобы его найти, надо заполнить объем жидкостью постоянной плотности и найти центр масс жидкости).

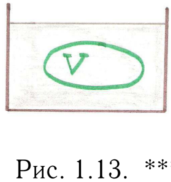

Рис. 1.13. ***

Данный вывод (закон Архимеда) применим только в случае, если жидкость окружает тело *со всех сторон.*

Покажем, что тело с плотностью, меньшей плотности воды, будет всплывать, а тело с большей плотностью — тонуть в воде.

Пусть ρ — плотность тела, ρ_0 — плотность воды, V — объем тела. На тело, погруженное в жидкость, будут действовать направленная вверх сила Архимеда $\rho_0 gV$ и направленная вниз сила тяжести ρgV. При $\rho > \rho_0$ сила тяжести будет превосходить силу Архимеда, и тело будет тонуть; в случае $\rho < \rho_0$ тело всплывает.

Пусть тело плавает на поверхности жидкости, и в жидкость погружена только часть тела с объемом V_1. Тогда на тело будет действовать выталкивающая сила $\rho_0 gV_1$. Покажем, что объем погруженной в воду части плавающего тела относится к объему всего тела так же, как плотность тела относится к плотности воды (рис. 1.14).

Пусть V — объем тела, V_1 — объем погруженной в воду части тела, ρ_0 — плотность воды, ρ — плотность тела. Тогда на тело будет действовать сила тяжести ρgV и сила Архимеда $\rho_0 gV_1$. Эти силы будут уравновешиваться, если $\dfrac{\rho}{\rho_0} = \dfrac{V_1}{V}$.

1.4.3. Закон Архимеда и условие плавания тел: вывод на основе неравенства для полезной и затраченной работы. Второй способ обоснования закона Архимеда основан на использовании неравенства для полезной и

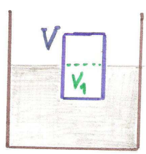

Рис. 1.14. ***

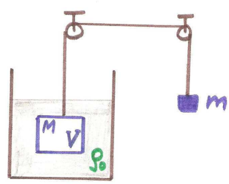

Рис. 1.15. ***

затраченной работы. Рассмотрим изображенную на рисунке систему, используемую обычно для взвешивания тел в воде: через блок перекинута нить, к одному концу которой подвешен груз массой m в воздухе, а к другому концу — груз массой M объема V в жидкости плотности ρ_0 (рис. 1.15).

Исследуем, в какую сторону в такой системе могут двигаться грузы.

Пусть груз массой m опустился на расстояние h; тогда груз массой M поднялся на ту же высоту h. Полезная работа механизма (подъем груза M на высоту h) равна

$$A_{\text{полезн}} = Mgh.$$

Затраченная работа механизма заключается в том, что груз массой m опустился на расстояние h, а также на расстояние h опустился объем жидкости V, обменявшийся с погруженным телом. Следовательно,

$$A_{\text{затр}} = mgh + \rho_0 Vgh.$$

Учтем, что полезная работа механизма не может быть больше затраченной. Следовательно, рассматриваемый процесс возможен при

$$M < m + \rho_0 V.$$

Рассуждая аналогично, получаем, что обратный процесс возможен при

$$M > m + \rho_0 V.$$

Равновесие в системе достигается при

$$M = m + \rho_0 V \quad \Longleftrightarrow \quad m = M - \rho_0 V.$$

Таким образом, сила, с которой прогруженный в жидкость груз растягивает нить, равна $Mg - \rho_0 gV$; следовательно, на данный груз, помимо силы тяжести Mg, действует также выталкивающая сила $\rho_0 gV$.

1.4.4. Задача Паскаля о давлении жидкости на дно сосуда; ее решение на основе неравенства для полезной и затраченной работ. Опыты Паскаля. Используя принцип минимума высоты центра масс (эквивалентный неравенству для полезной и затраченной работы), Паскаль в середине XVII века решил задачу о давлении жидкости на дно и стенки сосуда. Рассмотрим вслед за Паскалем установку для измерения давления жидкости на дно сосуда.

Пусть имеется сосуд сложной формы, а его дно закрыто поршнем, который подсоединен через систему неподвижных блоков к грузу. Плотность жидкости в сосуде ρ_0, уровень жидкости H, площадь поршня S. Найдем, используя неравенство для полезной и затраченной работы, в какую сторону могут двигаться грузы и поршень (рис. 1.16).

Пусть груз массой m опустился на расстояние h. Тогда поршень площади S поднялся на расстояние h (рис. 1.17).

В жидкости произошли следующие изменения: на высоте 0 "исчез"объем Sh, а на высоте h он "появился". Поэтому полезная работа механизма заключается в подъеме объема Sh на высоту H:

$$A_{\text{полезн}} = \rho_0 Sh \cdot gH.$$

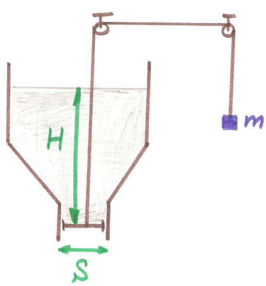

Рис. 1.16. ***

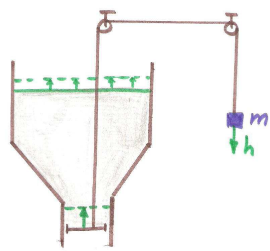

Рис. 1.17. ***

Затраченная работа по опусканию груза массой m на h равна

$$A_{\text{затр}} = mgh.$$

Рассмотренный процесс возможен, если полезная работа меньше затраченной, т.е. при

$$\rho_0 SH < m.$$

Аналогично получаем, что обратный процесс возможен при

$$\rho_0 SH > m.$$

Система, таким образом, будет находиться в равновесии при

$$\rho_0 SH = m.$$

Данное соотношение, полученное Паскалем, может быть проинтерпретировано следующим образом: сила натяжения нити mg, действующей на поршень, уравновешивается *силой давления жидкости* на дно сосуда, равной

$$F = \rho_0 gHS.$$

Важно отметить, что сила давления жидкости на дно определяется только площадью дна и высотой столба жидкости и не зависит от формы сосуда. В частности, в трех изображенных на рисунке сосудах силы давления жидкости на дно одинаковы (рис. 1.18).

Иллюстрируя свою формулу для давления жидкости, Паскаль провел следующий опыт: в закрытую бочку с водой была вставлена тонкая трубка, длиной порядка нескольких метров (рис. 1.19).

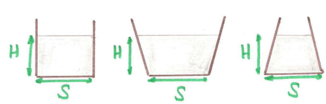

Рис. 1.18. ***

Влив в трубку небольшое количество воды, Паскаль добился значительного увеличения высоты столба жидкости — бочка была разорвана.

1.4.5. Задача Паскаля о давлении жидкости на стенку сосуда. Закон Паскаля. Понятие давления. Единицы измерения давления (паскаль, килограмм-силы на квадратный метр, метр водяного столба, миллиметр ртутного столба). Вывод закона Архимеда из закона Паскаля. Чтобы найти силу давления жидкости на стенку сосуда, Паскаль рассмотрел изображенную на рисунке 1.20 систему.

Пусть масса груза m, высота уровня воды над центром поршня H, площадь поршня S. Как показывает аналогичное рассуждение, система находится в равновесии при том же условии $\rho SH = m$ — сила натяжения нити mg уравновешивается силой давления жидкости на стенку сосуда ρgSH.

Таким образом, сила давления жидкости на участок как дна, так и стенки сосуда не зависит от направления стенки и равна

$$F = \rho_0 gHS.$$

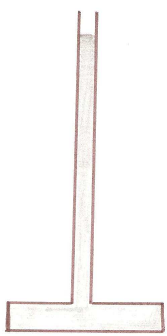

Рис. 1.19. ***

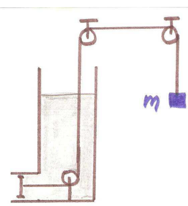

Рис. 1.20. ***

В дальнейшем данный факт был назван *законом Паскаля*: давление, производимое на жидкость, передается равномерно по всем направлениям.

Рассуждения и опыты Паскаля позволили ввести в физику важное понятие — *давление жидкости*, равное отношению силы давления на участок дна или стенки сосуда к площади этого участка:

$$P = \frac{F}{S}.$$

Из полученного выше выражения для силы давления получаем:

$$P = \rho_0 g H.$$

Давление можно измерять в паскалях (1 Па = 1 Н/м^2), килограммах силы на квадратный метр (1 кгс/м^2), метрах водяного столба (давление, создаваемое столбом воды высотой 1 м), миллиметрах ртутного столба (давление, создаваемое столбом ртути высотой 1 мм).

На основании закона Паскаля можно дать еще одно обоснование закона Архимеда. Этот вывод позволяет лучше понять природу сил, действующих на погруженное в жидкость тело.

Пусть тело в форме прямоугольного параллелепипеда высотой a и площадью основания S погружено в жидкость плотности ρ_0 так, что ребро a вертикально, верхняя грань

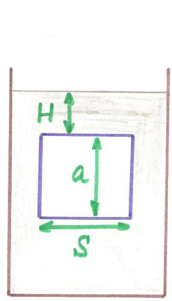

Рис. 1.21. ***

параллелепипеда погружена на глубину H, нижняя — на глубину $H + a$ (рис. 1.21).

Сила давления, действующая на верхнюю грань, равна $\rho_0 gHS$ и направлена вниз, на нижнюю грань — равна $\rho_0 g(H + a)S$ и направлена вверх. Следовательно, результирующая сила равна $\rho_0 gaS$, что согласуется с законом Архимеда.

1.4.6. Задача Паскаля о гидравлическом прессе: решение на основе неравенства для полезной и затраченной работы. Паскаль также рассмотрел задачу о гидравлическом прессе. Имеются два сообщающихся сосуда с жидкостью плотности ρ_0: один площадью S_1, другой — площадью S_2; первый сосуд закрыт поршнем с грузом массой m_1, второй — поршнем с грузом массой m_2. Уровень жидкости в первом сосуде H_1, во втором сосуде H_2 ($H_2 > H_1$), см. рис. 1.1.

Исследуем, в какую сторону могут двигаться грузы.

Пусть первый поршень опустился на малое расстояние h_1, второй — поднялся на малое расстояние h_2. В силу сохранения объема жидкости (рис. 1.23)

$$V = S_1 h_1 = S_2 h_2.$$

Полезная работа рассматриваемого механизма заключается в том, что:

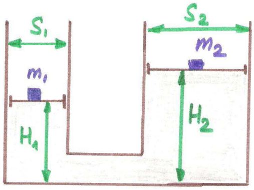

Рис. 1.22. ***

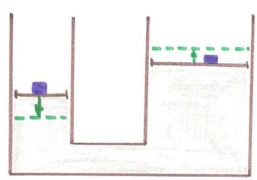

Рис. 1.23. ***

- груз массой m_2 поднимается на h_2 (полезная работа $m_2 g h_2 = m_2 g \frac{V}{S_2}$);
- объем жидкости V "исчезает"на уровне H_1 и "появляется"на уровне H_2 (полезная работа $\rho_0 V g(H_2 - H_1)$).

Таким образом,

$$A_{\text{полезн}} = m_2 g \frac{V}{S_2} + \rho_0 V g(H_2 - H_1).$$

Затраченная работа механизма заключается в том, что груз массой m_1 опустился на расстояние h_1:

$$A_{\text{затр}} = m_1 g h_1 = m_1 g \frac{V}{S_1}.$$

Рассматриваемый процесс возможен, если полезная работа меньше затраченной:

$$m_2 g \frac{V}{S_2} + \rho_0 V g(H_2 - H_1) < m_1 g \frac{V}{S_1},$$

или

$$\frac{m_2 g}{S_2} + \rho_0 g H_2 < \frac{m_1 g}{S_1} + \rho_0 g H_1.$$

Рассуждая аналогично, получим, что грузы могут двигаться в обратном направлении при

$$\frac{m_2 g}{S_2} + \rho_0 g H_2 > \frac{m_1 g}{S_1} + \rho_0 g H_1.$$

Следовательно, равновесие в системе будет достигаться при

$$\frac{m_2 g}{S_2} + \rho_0 g H_2 = \frac{m_1 g}{S_1} + \rho_0 g H_1.$$

Этому условию можно дать следующую интерпретацию: давление внизу левого сосуда складывается из производимого на поршень давления $\frac{m_1 g}{S_1}$ и давления столба жидкости $\rho_0 g H_1$; давление внизу правого сосуда — из производимого на поршень давления $\frac{m_2 g}{S_2}$ и давления столба жидкости $\rho_0 g H_2$. Поскольку сосуды сообщаются, эти суммарные давления должны совпадать — иначе жидкость будет перетекать из сосуда с большим давлением в сосуд с меньшим давлением.

Отметим, что при отсутствии грузов на поршнях *уровень жидкости в сообщающихся сосудах одинаков* ($H_1 = H_2$).

1.4.7. Пример механизма, устанавливающего разность уровней жидкости в сообщающихся сосудах. Понятие об обратимом и необратимом процессах. Рассмотрим систему из двух сообщающихся сосудах площади S с жидкостью плотности ρ_0. В равновесии уровень жидкости в сосудах одинаков. Пусть требуется установить разность уровней $2H$, опустив на H уровень жидкости в первом сосуде и подняв на H во втором (рис. 1.24).

Простейший способ реализовать данный процесс заключается в следующем. На поршень, закрывающий один из сосудов, ставится груз такой массы M, чтобы разность уровней жидкости в сосудах равнялась $2H$:

$$\frac{Mg}{S} = \rho_0 g \cdot 2H.$$

Найдем полезную и затраченную работу данного механизма и рассчитаем его КПД.

Полезная работа данного механизма заключается в том, что столб жидкости высоты H и площади сечения S "исчезает"в левом сосуде и "появляется"в правом, поднявшись на H:

$$A_{\text{полезн}} = \rho_0 SH \cdot g \cdot H = \rho_0 g S H^2.$$

Затраченная работа заключается в том, что груз массой M опускается на H:

$$A_{\text{затр}} = Mg \cdot H = \rho g \cdot 2H \cdot S \cdot H = 2\rho_0 g S H^2.$$

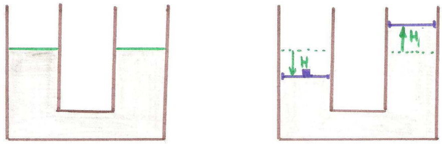

Рис. 1.24. ***

Следовательно, КПД механизма равен 1/2.

В чем причина невысокого КПД? При постановке груза на поршень в системе возникают колебания. Равновесие будет достигнуто тогда, когда эти колебания затухнут. При затухании колебаний механическая энергия переходит в другие виды энергии.

Как можно повысить КПД механизма? Для этого можно нагружать поршень не сразу, а постепенно, за n шагов. На каждом шаге на поршень ставится груз массой M/n — поршень опускается на H/n. Найдем КПД такого механизма (рис. 1.25).

Полезная работа механизма оказывается такой же, как и в предыдущем случае.

Найдем затраченную работу. Она заключается в том, что:

- на первом шаге груз M/n опускается на H/n (затраченная работа $\frac{MgH}{n^2}$);
- на втором шаге груз $2M/n$ опускается на H/n (затраченная работа $\frac{MgH}{n^2} \cdot 2$);
- на третьем шаге груз $3M/n$ опускается на H/n (затраченная работа $\frac{MgH}{n^2} \cdot 3$);
- ...
- на n-м шаге груз $2M/n$ опускается на H/n (затраченная работа $\frac{MgH}{n^2} \cdot n$).

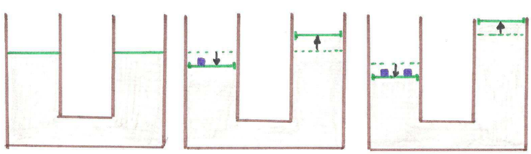

Рис. 1.25. ***

В сумме затраченная работа оказывается равной

$$A_{\text{затр}} = \frac{MgH}{n^2}(1 + 2 + ... + n).$$

Учтем, что

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

тогда

$$A_{\text{затр}} = \frac{MgH(n+1)}{2n} = \frac{\rho g \cdot 2H \cdot S \cdot H(n+1)}{2n} = \frac{\rho g S H^2(n+1)}{n}.$$

Следовательно, КПД механизма равен $\dfrac{n}{n+1}$. При увеличении количества шагов n КПД приближается к единице.

Рассмотренные примеры позволяют проиллюстрировать важные понятия обратимого и необратимого процессов. Количественной мерой необратимости процесса можно считать потерянную работу, равную разности затраченной и полезной работы: если она мала, мы можем возвращать тела системы практически в прежнее состояние, если не мала — не можем.

Первый из рассмотренных процессов необратим: при снятии груза массой M жидкость возвращается в прежнее состояние, однако груз массы M окажется опущенным по сравнению с первоначальным положением на H.

Второй процесс при больших n приближается к обратимому: при последовательном снятии каждого из маленьких грузиков жидкость возвращается в прежнее состояние, а все грузики окажутся опущенными на расстояние H/n. При больших n это расстояние стремится к нулю.