Глава 8

ВЫЧИСЛЕНИЯ В СТЕРЕОМЕТРИИ

§8.1. Расстояния и углы

8.1.1. Расстояние от точки до плоскости с известным вектором нормали. Уравнение плоскости. Угол между прямой и плоскостью. Часто встречается задача о нахождении расстояния между точкой и плоскостью. Решение этой задачи упрощается, если известен вектор нормали $\overrightarrow{n}$, перпендикулярный к плоскости.

Пусть S — точка на плоскости. Согласно пункту 7.2.5, спроектировать точку A на плоскость можно следующим образом: провести через точку A прямую, параллельную[1] вектору $\overrightarrow{n}$ и опустить на эту прямую из точки S перпендикуляр SA_1. Точка A_1 будет являться проекцией точки A на плоскость (рис. 8.1).

Обозначим через φ угол между вектором $\overrightarrow{SA}$ и нормалью $\overrightarrow{n}$. Рассчитаем расстояние от точки A до плоскости:

$$AA_1 = SA|\cos\varphi| = \frac{|(\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{n})|}{|\overrightarrow{n}|}. \tag{8.1}$$

Как вытекает из соотношения (8.1), точка A лежит в плоскости (расстояние до плоскости равно нулю) тогда и только тогда, когда $(\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{n}) = 0$. Следовательно, уравнение плоскости γ, проходящей (рис. 8.2) через точку S с коор-

[1]) или проходящую через этот вектор

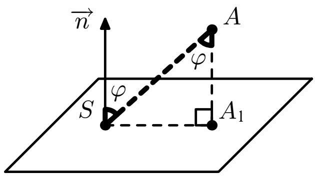

Рис. 8.1. Проектирование точки на плоскость с известным перпендикуляром

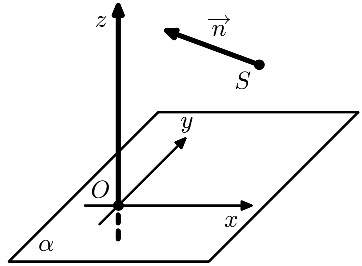

Рис. 8.2. К уравнению плоскости

динатами $(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{n}$ с компонентами $(n_x; n_y; n_z)$, запишется как

$$0 = (\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{n}) = (x - x_0)n_x + (y - y_0)n_y + (z - z_0)n_z.$$

Его можно записать и в других видах, выразив, например, координату z через координаты x и y.

Также встречается задачи о расчете угла между прямой и плоскостью — острого угла между прямой и ее проекцией на плоскость. Например, проекцией прямой SA на плоскость α является прямая SA_1 — угол между прямой SA и плоскостью α равен $|90^\circ - \varphi|$. Синус этого угла равен модулю косинуса угла φ:

$$\sin|90^\circ - \varphi| = |\cos\varphi| = \frac{AA_1}{AS} = \frac{|(\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{n})|}{|\overrightarrow{n}| \cdot |SA|}.$$

8.1.2. Угол между плоскостями и угол между их перпендикулярами. Пусть две плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой l. Введем понятие угла между плоскостями α и β.

Выберем на прямой l точку S и проведем к прямой l из точки S два перпендикуляра: перпендикуляр m — в плоскости α, перпендикуляр k — в плоскости β (рис. 8.3). Угол между прямыми m и k является углом между

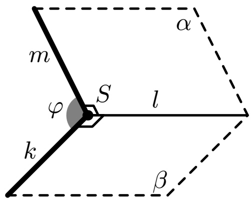

Рис. 8.3. Угол между плоскостями

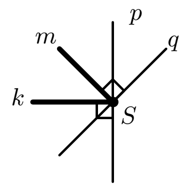

Рис. 8.4. Угол между перпендикулярами к плоскостям

плоскостями α и β. Так как при параллельном переносе вдоль вектора на прямой l углы сохраняются, угол между плоскостями не зависит от выбора точки S на прямой l.

Покажем, что угол между плоскостями равен углу между перпендикулярами к плоскостям.

Проведем через прямые m и k плоскость γ. В этой плоскости проведем перпендикулярные прямые $q \perp m$ и $p \perp k$. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости, $q \perp \alpha$ и $p \perp \beta$ (рис. 8.4). Угол между прямыми q и p оказывается равен углу между прямыми m и k.

8.1.3. Поведение площадей фигур при проектировании. Расчет косинуса угла между треугольником в пространстве и координатной плоскостью. Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой l, а в плоскости α выбран прямоугольный треугольник $\Phi = \triangle ABC$ (угол C прямой) с катетом AC на прямой l. Спроектировав его на плоскость β, получим треугольник $\Phi_1 = \triangle AB_1C$ (рис. 8.5). Найдем, как связаны площади треугольников с углом φ между плоскостями.

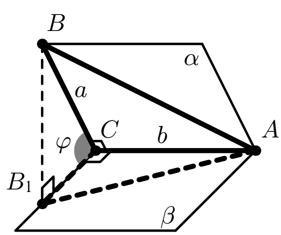

Рис. 8.5. Проектирование прямоугольного треугольника

Обозначим $AC = b$, $BC = a$. Спроектировать вершину B на прямую AC (получится проекция C) — все равно, что спроектировать точку B сначала на плоскость β (получится точка B_1), а затем — спроектировать точку B_1 на прямую AC. Таким образом, точка C является проекцией точки B_1 на прямую AC — треугольник $\triangle ACB_1$ также прямоугольный с прямым углом C. При этом $B_1C = a \cdot \cos\varphi$.

Поскольку площади треугольников составляют $S_\Phi = ab/2$ и $S_{\Phi_1} = ab\cos\varphi/2$, получим:

$$S_{\Phi_1} = S_\Phi \cos\varphi. \tag{8.2}$$

Полученная для площади проекции прямоугольного треугольника формула (8.2) обобщается и на другие фигуры:

- прямоугольник, сторона которого лежит на прямой l (и прямоугольник, и его проекция в два раза больше прямоугольного треугольника с катетом на прямой l);
- прямоугольник, две стороны которого параллельны прямой l (это разность двух прямоугольников, одна из сторон которого лежит на прямой l)
- любая фигура (приближенно совпадает с любой наперед заданной точностью с системой прямоугольников, две стороны которых параллельны прямой l).

Формулу (8.2) можно использовать для расчета косинуса угла между плоскостями. Пусть A и B — точки с координатами $(a_x; a_y; a_z)$ и $(b_x; b_y; b_z)$ соответственно.

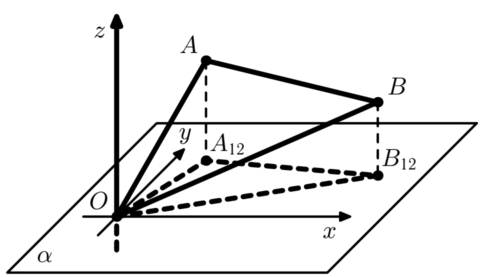

Рис. 8.6. Проектирование треугольника на плоскость Oxy

Найдем косинус угла γ между плоскостью треугольника $\triangle OAB$ и координатной плоскостью Oxy, считая площадь $\triangle OAB$ равной S.

При проектировании на плоскость Oxy точки A и B переходят в точки A_{12} и B_{12} (рис. 8.6). Рассчитаем площадь проекции по формуле (6.9):

$$S_{\triangle OA_{12}B_{12}} = \frac{1}{2}|a_x b_y - a_y b_x|.$$

Используя соотношение (8.2), находим:

$$|\cos\gamma| = \frac{1}{2S}|a_x b_y - a_y b_x|. \tag{8.3}$$

Отметим, что угол γ можно рассматривать как угол между перпендикуляром к плоскости OAB и осью z.

8.1.4. Построение перпендикуляра к треугольнику. Понятие о векторном произведении векторов. Найдем компоненты $(n_x; n_y; n_z)$ вектора $\overrightarrow{n}$ длины n, перпендикулярного плоскости треугольника $\triangle OAB$ (или перпендикулярного векторам $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}$ с компонентами $(a_x; a_y; a_z)$ и $(b_x; b_y; b_z)$ соответственно).

Обозначая через α, β и γ углы между вектором $\overrightarrow{n}$ и координатными осями x, y и z соответственно, получим:

$$n_x = n\cos\alpha, \quad n_y = n\cos\beta, \quad n_z = n\cos\gamma.$$

Задача свелась к нахождению косинусов углов.

Модуль косинуса γ уже был найден (соотношение (8.3)). Чтобы определить знак, зафиксируем направление вектора $\overrightarrow{n}$: условимся, что наблюдатель, расположенный на конце вектора $\overrightarrow{n}$, видит поворот от вектора $\overrightarrow{a}$ к вектору $\overrightarrow{b}$ осуществляющимся против часовой стрелки. Координатные оси также выберем таким образом, чтобы поворот от оси x к оси y был виден из точек с положительной z-координатой совершающимся против часовой стрелки.

Тогда $\cos\gamma$ будет положителен, если поворот от вектора $\overrightarrow{OA_{12}}$ к вектору $\overrightarrow{OB_{12}}$ совершается против часовой стрелки, то есть при $a_x b_y - a_y b_x > 0$. Поэтому

$$\cos\gamma = \frac{1}{2S}(a_x b_y - a_y b_x).$$

Выражения для двух других косинусов получаются переименованием осей:

$$\cos\alpha = \frac{1}{2S}(a_y b_z - a_z b_y), \qquad \cos\beta = \frac{1}{2S}(a_z b_x - a_x b_z).$$

Соотношения для компонент вектора $\overrightarrow{n}$ принимают наиболее удобный вид, если выбрать длину этого вектора равной $2S$:

$$n = 2S. \tag{8.4}$$

Тогда

$$n_x = a_y b_z - a_z b_y, \quad n_y = a_z b_x - a_x b_z, \quad n_z = a_x b_y - a_y b_x. \tag{8.5}$$

Вектор $\overrightarrow{n}$ с компонентами (8.5) называют *векторным произведением* векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. Будем обозначать его как

$$\overrightarrow{n} \equiv \left[\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right]. \tag{8.6}$$

Оно удовлетворяет свойству перпендикулярности [1]

$$\left[\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right] \perp \overrightarrow{a}, \qquad \left[\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right] \perp \overrightarrow{b}, \tag{8.7}$$

а его модуль согласно (8.4) равен [2] удвоенной площади $\triangle OAB$:

$$\left|\left[\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right]\right| = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \sin\varphi. \tag{8.8}$$

[1] Соотношение (8.7) можно проверить и прямым расчтом скалярных произведений вектора $\overrightarrow{n}$ на вектор $\overrightarrow{a}$ и на вектор $\overrightarrow{b}$.

[2] Читателю рекомендуется получить соотношение (8.8), рассчитав косинус угла φ через скалярное произведение векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ и выразив синус через косинус

8.1.5. Операции над векторами в пространстве и кватернионы Гамильтона. Понятия скалярного и векторного произведения стали общеизвестными после введения в математику кватернионов — выражений вида $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ с тремя «мнимыми единицами» i, j и k и действительными коэффициентами a_0, a_1, a_2 и a_3. Вводятся правила возведения в квадрат

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

и перемножения мнимых единиц:

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

Если сопоставить вектору $\overrightarrow{a}$ с компонентами $(a_x; a_y; a_z)$ кватернион

$$Q_{\overrightarrow{a}} = a_x i + a_y j + a_z k, \tag{8.9}$$

то произведение кватернионов $Q_{\overrightarrow{a}} Q_{\overrightarrow{b}}$ можно представить через скалярное и векторное произведения векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$:

$$Q_{\overrightarrow{a}} Q_{\overrightarrow{b}} = -(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) + Q_{[\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}]}. \tag{8.10}$$

Раскрывая скобки, получим:

$$Q_{\overrightarrow{a}} Q_{\overrightarrow{b}} = (a_x i + a_y j + a_z k)(b_x i + b_y j + b_z k) =$$

$$= -(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) +$$

$$+ (a_x b_y - a_y b_x)k + (a_z b_x - a_x b_z)j + (a_y b_z - a_z b_y)i,$$

что в соответствии с обозначением (8.9) доказывает соотношение (8.10).

8.1.6. Расстояние между скрещивающимися прямыми. Метод построения общего перпендикуляра (плоскость через одну из прямых параллельно другой, проектирование на эту плоскость), единственность перпендикуляра. Векторный метод расчета расстояния. Еще одна задача стереометрии — расчет расстояния между скрещивающимися прямыми l и m (это прямые, не лежащие в одной плоскости). Оно равно длине общего

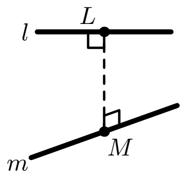

Рис. 8.7. Общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым

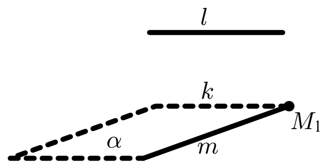

Рис. 8.8. Плоскость, проходящая через m параллельно l

перпендикуляра LM к этим прямым: следует подобрать точку L на прямой l и точку M на прямой m таким образом, чтобы прямая LM была перпендикулярна и прямой l, и прямой m, а затем найти длину отрезка LM (рис. 8.7).

Основные этапы построения общего перпендикуляра следующие.

1. Проведем через прямую m плоскость α параллельно прямой l (рис. 8.8).

Это можно сделать следующим образом: выбрать на прямой m точку M_1, провести через нее прямую k параллельно l и провести через прямые k и m плоскость α. Прямая l, параллельная одной из прямых плоскости α, будет параллельна и всей плоскости.

2. Спроектируем прямую l на плоскость α — проекцией прямой l будет прямая l_1, параллельная l (рис. 8.9).

Для этого спроектируем сначала одну из точек A прямой l на плоскость α и получим точку A_1. Через

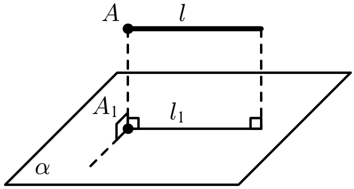

Рис. 8.9. Проектирование прямой l на плоскость α

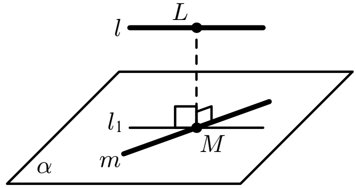

Рис. 8.10. Построение общего перпендикуляра

прямые l и AA_1 проведем плоскость β, пересекающую плоскость α по прямой l_1. Эта прямая l_1 будет являться проекцией прямой l: опущенные на прямую l_1 из точек прямой l на прямую l_1 в плоскости β перпендикуляры будут параллельны перпендикуляру AA_1 и являться перпендикулярами к плоскости α.

3. Прямые l_1 и m пересекаются в точке M — проекции точки L (рис. 8.10). Отрезок LM перпендикулярен плоскости α, а значит и прямым l_1 и m, а также прямой l, параллельной l_1.

Покажем, что построенное расстояние LM является кратчайшим расстоянием между точками прямых.

Пусть A — точка прямой l, B — некоторая точка прямой m, A_1 — проекция точки A на плоскость α (рис. 8.11). Как противоположные стороны прямоугольника $ALMA_1$, отрезки AA_1 и LM равны. По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника AA_1B,

$$AB^2 = AA_1^2 + A_1B^2 = LM^2 + A_1B^2.$$

Следовательно, $AB > LM$ — кроме случая, когда точки A_1 и B совпадают с точкой M (при этом точка A совпадает с L).

Тот факт, что любое другое расстояние между точками скрещивающихся прямых превосходит LM, показывает, что общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым является единственным.

Получим выражения для расстояния между скрещивающимися прямыми, считая известными компоненты хотя бы

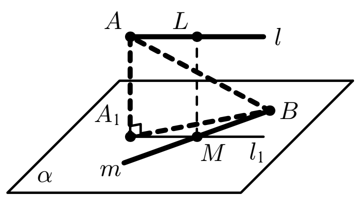

Рис. 8.11. К расчету расстояния между точками скрещивающихся прямых

одного вектора $\overrightarrow{n}$, перпендикулярного и прямой l, и прямой m, и координаты точек A прямой l и B прямой m.

Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от точки A до плоскости α, которое, согласно (8.1), равно

$$AA_1 = \frac{|(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{n})|}{|\overrightarrow{n}|}.$$

8.1.7. Построение сферы, описанной около пирамиды. В задачах стереометрии часто встречаются сферы. Сфера с центром в точке S и радиусом $R > 0$ состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии R от точки S. Обозначая координаты центра сферы как $(x_0; y_0; z_0)$, получаем, что точка с координатами $(x; y; z)$ лежит на сфере тогда и только тогда, когда

$$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2. \tag{8.11}$$

Рассмотрим задачу о построении сферы, описанной около пирамиды с вершиной M и основанием — многоугольником в плоскости α. Сфера должна проходить через точку M и вершины основания.

Представим, что введена система координат, в которой плоскость Oxy $(z = 0)$ выбрана в плоскости α основании пирамиды. Как вытекает из уравнения сферы (8.11), сфера и плоскость Oxy пересекаются по окружности с центром в точке P с координатами $(x_0; y_0)$ (это проекция центра сферы S на основание пирамиды) и радиусом $\sqrt{R^2 - z_0^2}$.

Таким образом, первый шаг к построению сферы, описанной около пирамиды, — построение окружности с центром в точке P и радиусом R_0, описанной около основания пирамиды (рис. 8.12). Если такую окружность провести нельзя — сферу также нельзя описать около пирамиды.

Далее следует провести через точку P перпендикуляр l к основанию пирамиды. Требуется построить такую точку S на этом перпендикуляре, которая была бы находилась на равном расстоянии от вершины M и построенной

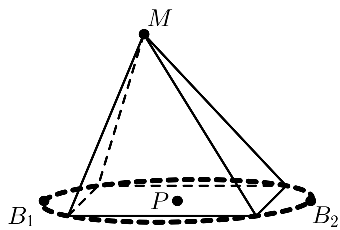

Рис. 8.12. Построение сферы начинается с окружности

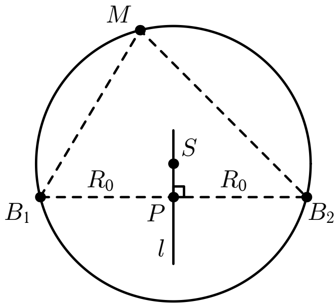

Рис. 8.13. Поиск центра описанной сферы

окружности. Для этого можно провести через точки M и l плоскость β — она пересечет окружность в точках B_1 и B_2, на расстоянии R_0 от точки P (рис. 8.13).

Искомая точка S совпадает с центром окружности, описанной около треугольника MB_1B_2.

§8.2. Объемы и площади поверхностей

8.2.1. Формула, представляющая объем пространственной фигуры через интеграл. Измерить объем фигуры — значит определить, сколько эталонных фигур в ней содержится[1]. Рассмотрим часть фигуры, расположенную между плоскостями $z = z_0$ и $z = z_0 + \Delta z$ (рис. 8.14). Если считать Δz достаточно малым, сечения фигуры плоскостями $z = \mathrm{const}$ будут примерно одни и те же, поэтому можно приближенно считать рассматриваемую часть фигуры цилиндром, объем которого выражается через площадь сечения $S(z_0)$ как

$$\Delta V \simeq S(z_0)\Delta z. \tag{8.12}$$

[1] За эталон объема принимают куб единичной длины, стороны которого параллельны координатным осям. Тот факт, что объем куба не меняется при движениях, нуждается в доказательстве!

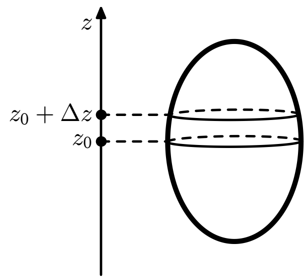

Рис. 8.14. К расчету объема

Чтобы рассчитать объем всей фигуры, следует просуммировать объемы малых частей (8.12). Эта сумма является интегралом:

$$V = \int\limits_{z_-}^{z_+} S(z)dz. \qquad (8.13)$$

Предполагается, что вся фигура заключена между плоскостями $z = z_-$ и $z = z_+$.

8.2.2. Расчет объема треугольной пирамиды. Объем многоугольной пирамиды и прямого кругового конуса. Представление объема треугольной пирамиды через скалярное и векторное произведения. В качестве примера рассчитаем объем треугольной пирамиды. Совместим начало координат с вершиной пирамиды, а ось

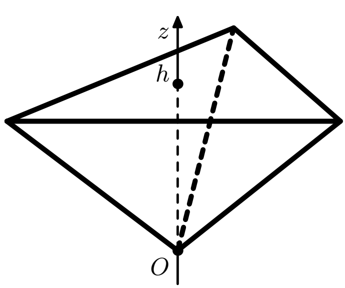

Рис. 8.15. Пирамида

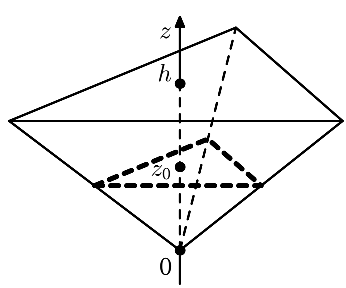

Рис. 8.16. Сечение пирамиды

z — с высотой пирамиды, перпендикулярной к основанию (рис. 8.15). Плоскость основания пирамиды будет задаваться уравнением $z = h$, где h — длина высоты пирамиды.

Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью $z = z_0$ (рис. 8.16). Оно является треугольником, полученным из основания пирамиды преобразованием подобия с коэффициентом z_0/h. Следовательно, площадь сечения выражается через площадь основания S_0 как

$$S(z_0) = S_0(z_0/h)^2.$$

Согласно соотношению (8.13),

$$V = \int_0^h S_0(z/h)^2 dz = \frac{S_0}{h^2}\int_0^h z^2 dz.$$

Поскольку $\int_0^h z^2 dz = h^3/3$, получим:

$$V = \frac{S_0 h}{3}. \qquad (8.14)$$

Поскольку многоугольную пирамиду можно разбить на треугольные, соотношение (8.14) справедливо и для многоугольной пирамиды. Конус можно представлять как многоугольную пирамиду с очень большим числом углов — соотношение (8.14) верно и для конуса.

Объем пирамиды $OABC$ можно выразить через скалярное и векторное произведения векторов $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ (рис. 8.17).

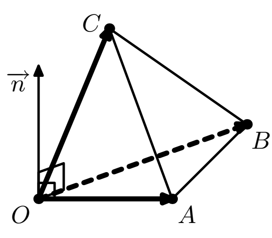

Рис. 8.17. К выражению объема пирамиды

Пусть $\overrightarrow{n}$ — нормаль к плоскости основания OAB. Согласно соотношению (8.1), высота пирамиды — расстояние от точки C до плоскости основания пирамиды OAB — равна

$$h = \frac{|(\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{n})|}{|\overrightarrow{n}|}.$$

В качестве вектора $\overrightarrow{n}$ можно выбрать векторное произведение

$$\overrightarrow{n} = \left[\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right],$$

модуль которого выражается через площадь основания S_0:

$$|\overrightarrow{n}| = 2S_0.$$

Используя соотношение (8.14), получим:

$$V = \frac{1}{3}S_0 h = \frac{1}{6}|\overrightarrow{n}|h = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{c} \cdot \left[\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right])\right|.$$

8.2.3. Связь радиуса вписанной сферы с объемом и площадью поверхности многогранника. Пусть в некоторый многогранник вписана сфера с центром в точке O, которая касается *всех* граней многогранника. Радиус этой сферы можно выразить через площадь поверхности и объем многогранника.

Соединим точку O со всеми вершинами многогранника. В результате многогранник разобьется на пирамиды 1, 2, 3, ... с основаниями на гранях многогранника и общей вершиной в точке O. Высота любой из пирамид равна r, объемы пирамид V_1, V_2, $\ldots$ выражаются через площади оснований S_1, S_2, $\ldots$ как

$$V_1 = \frac{1}{3}S_1 r, \qquad V_2 = \frac{1}{3}S_2 r, \qquad \ldots$$

Поэтому общий объем многогранника

$$V = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \ldots)r = \frac{1}{3}Sr.$$

8.2.4. Объемы шарового сегмента и шара. Рассчитаем объем шарового сегмента радиуса R высотой h — части шара радиуса R с центром в начале координат, заключенной между плоскостями $z = R - h$ и $z = R$ (рис. 8.18).

Сечением шара плоскостью $z = z_0$ является круг радиуса $\sqrt{R^2 - z_0^2}$ и площади $S(z_0) = \pi(R^2 - z_0^2)$ (рис. 8.19). Поэтому объем шарового сегмента выражается через интеграл

$$V = \int\limits_{R-h}^{R} \pi(R^2 - z^2)dz = \pi R^2 \int\limits_{R-h}^{R} dz - \pi \int\limits_{R-h}^{R} z^2 dz.$$

Рассчитывая интеграл, получим:

$$V = \pi R^2 h - \pi\frac{1}{3}(R^3 - (R-h)^3) = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right).$$

В частности, при $h = R$ рассматриваемая фигура является полушаром — ее объем равен $2\pi R^3/3$; объем шара в два раза больше

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

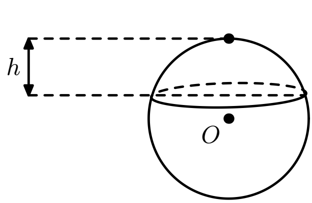

Рис. 8.18. Плоскость отсекает шаровой сегмент от шара и сегментную поверхность от сферы

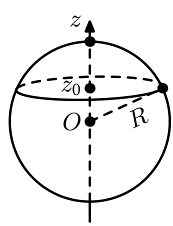

Рис. 8.19. Сечение шара плоскостью

8.2.5. Площадь боковой поверхности правильной многоугольной пирамиды, прямого кругового конуса и усеченного прямого кругового конуса. Помимо объемов, часто возникают задачи о расчетах площадей различных поверхностей.

Начнем с боковой поверхности правильной n-угольной пирамиды со стороной основания a и высотой [1] боковой грани l (рис. 8.20).

Площадь одной боковой грани с основанием a равна $al/2$ — общая боковая поверхность пирамиды составляет $S = nal/2$. Она выражается через периметр P основания как

$$S = \frac{1}{2}Pl. \tag{8.15}$$

Прямой круговой конус (рис. 8.21) можно рассматривать как правильную многоугольную пирамиду с очень большим числом сторон основания. Аналогом высоты боковой грани является *образующая* конуса. Формула (8.15) будет применима и для него. Поскольку периметром основания является длина окружности $2\pi r$, получим:

$$S = \pi r l.$$

[1] называемой апофемой

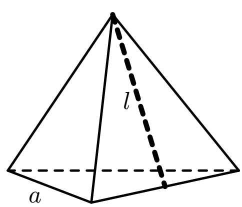

Рис. 8.20. К расчету боковой поверхности пирамиды

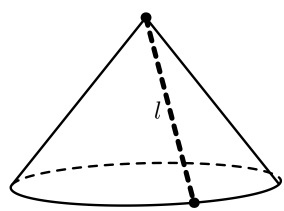

Рис. 8.21. Прямой круговой конус

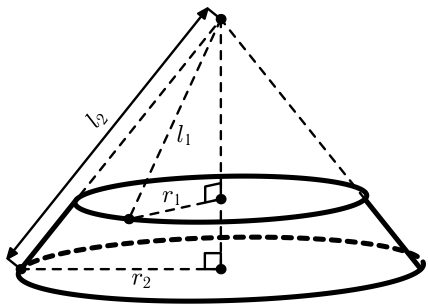

Рис. 8.22. Усеченный конус

Найдем площадь боковой поверхности усеченного конуса (рис. 8.22).

Усеченный конус можно представить как разность двух конусов: у одного — радиус основания r_1 и образующая l_1, у другого — радиус основания r_2 и образующая l_2. Площадь боковой поверхности усеченного конуса является разностью площадей боковых поверхностей конусов:

$$S = \pi(r_2 l_2 - r_1 l_1).$$

Учитывая, что $r_2/l_2 = r_1/l_1$, приведем выражение к виду

$$S = \pi(l_2 - l_1)(r_2 + r_1) = \pi(r_1 + r_2)l.$$

Величина $l = l_2 - l_1$ имеет смысл длины образующей усеченного конуса.

8.2.6. Площадь сегментной поверхности и сферы. Рассчитаем площадь сегментной поверхности — части сферы радиуса R с центром в начале координат, заключенной между плоскостями $z = R - h$ и $z = R$ (рис. 8.18).

Рассмотрим часть сегментной поверхности, заключенную между плоскостями $z = z_0$ и $z = z_0 + \Delta z$ (рис. 8.23). Ее можно приближенно считать усеченным конусом с образующей $\Delta l = \Delta z / \sin\alpha$ и примерно совпадающими радиусами оснований $r = R\sin\alpha$ (угол α изображен на

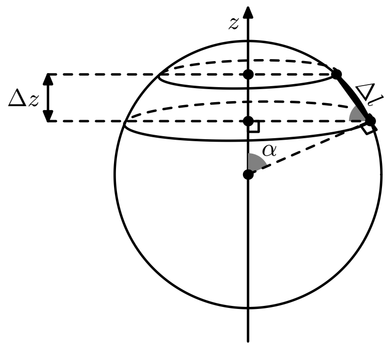

Рис. 8.23. К расчету площади сферы

рисунке). Площадь такой поврехности

$$\Delta S = \pi \cdot 2R \sin\alpha \cdot \frac{\Delta z}{\sin\alpha} = 2\pi R \Delta z.$$

Площадь всей сегментной поверхности найдем суммированием маленьких площадей (интегрированием):

$$S = \int_{R-h}^{R} 2\pi R dz = 2\pi Rh.$$

В частности, площадь поверхности полусферы ($h = R$) равна $2\pi R^2$, а площадь поверхности сферы в два раза больше:

$$S = 4\pi R^2.$$