Глава 7

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТЕРЕОМЕТРИИ

§7.1. Параллельность в стереометрии

7.1.1. Аксиомы стереометрии (наличие четырех точек не на плоскости, принадлежность прямой AB к плоскости, плоскость через три точки не на прямой, пересечение плоскостей более чем в одной точке). Геометрия в пространстве (стереометрия) опирается на уже известные из планиметрии результаты. Вместе с тем, вводятся новые понятие «плоскость» и отношение «точка лежит в плоскости», которые считаются неопределяемыми. Также формулируются не встречавшиеся в планиметрии аксиомы, специфические именно для пространственных отношений [1]):

1. *Существуют по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.*
2. *Если точки A и B лежат в некоторой плоскости, то и соединяющая их прямая лежит в этой же плоскости.*
3. *Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и только одну.*
4. *Если две плоскости имеют одну общую точку, то они имеют по крайней мере еще одну общую точку* [2]).

---

[1]) Приведенная система аксиом не является единственно возможной

[2]) Именно эта аксиома связана с трехмерностью пространства

7.1.2. Простейшие следствия аксиом (пересечение плоскостей по прямой, проведение плоскости через две пересекающиеся прямые, через точку и прямую). Пусть плоскости[1] α и β имеют общую точку A. Тогда они пересекаются по прямой, проходящей через точку A.

Действительно, эти плоскости имеют еще одну общую точку B и прямая AB лежит в обоих плоскостях. Точка C вне прямой AB не может лежать в обоих плоскостях: тогда через точки A, B и C можно было бы провести две плоскости.

Пусть a_1 и a_2 — две различные прямые, проходящие через точку A. Тогда через эти прямые можно провести плоскость, и только одну.

Выберем на прямой a_1 не совпадающую с A точку A_1, на прямой a_2 — не совпадающую с A точку A_2. Через точки A, A_1 и A_2 можно провести единственную плоскость; в ней будут лежать обе прямые, AA_1 и AA_2.

Пусть a — прямая, A — не лежащая на ней точка. Тогда через прямую a и точку A можно провести плоскость, и только одну.

Выберем на прямой a две точки B и C; тогда через точки A, B и C можно провести единственную плоскость — она будет содержать прямую a.

7.1.3. Параллельность прямых в пространстве. Построение параллельной прямой. Параллельность прямой и плоскости. Свойство прямой, параллельной некоторой прямой в плоскости. Две прямые в стереометрии называются *параллельными*, если они *лежат в одной плоскости* и не пересекаются.

Пусть требуется провести прямую m, параллельную прямой l, через точку B, не лежащую на прямой l.

Сначала проведем плоскость α через прямую l и точку B (прямая m должна лежать в одной плоскости с l); затем — параллельную прямую в плоскости α. Это построение однозначно.

---

[1] В стереометрии плоскости обозначают греческими буквами

Говорят, что прямая b и плоскость α *параллельны* ($b \parallel \alpha$), если они не имеют общих точек.

Покажем, что прямая m, параллельная прямой l в плоскости α, или лежит в плоскости α, или параллельна ей.

Предположим, что некоторая точка B прямой m лежит в плоскости α. Тогда по построению параллельной прямой вся прямая m должна лежать в плоскости α. Таким образом, прямая m или вся лежит в плоскости α, или не имеет с ней общих точек.

7.1.4. Построение проходящей через заданную точку прямой, параллельной сразу двум параллельным прямым. Свойство двух прямых, параллельных третьей. Приведем стереометрический способ построения прямой, параллельной сразу двум заданным параллельным прямым.

Пусть имеются параллельные прямые l_1 и l_2, лежащие в плоскости α, и точка C, не лежащая в этой плоскости (рис. 7.1). Проведены две плоскости: α_1 — через точку C и прямую l_1, α_2 — через точку C и прямую l_2. Покажем, что прямая m, по которой пересекаются плоскости α_1 и α_2, параллельна обоим прямым a_1 и a_2.

Действительно, прямые m и l_1 лежат в одной плоскости α_1. Они не пересекаются, так как прямая l_1 параллельна прямой l_2, а значит и плоскости α_2, в которой лежит прямая m (прямая l_1 не может лежать в плоскости α_2, так как тогда плоскости α, α_1 и α_2 все совпадут). Следовательно, $m \parallel l_1$. Поскольку нумерация прямых может быть выбрана произвольно, имеем также $m \parallel l_2$.

Покажем, что две прямые m и l_1, параллельные третьей прямой l_2, параллельны между собой или совпадают.

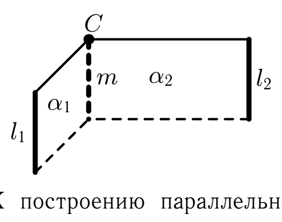

Рис. 7.1. К построению параллельной прямой

Обозначим через α плоскость, проходящую через прямые l_1 и l_2. Если прямая m лежит в плоскости α, доказываемое утверждение уже было проверено в планиметрии. Пусть теперь прямая m проходит через точку C, не лежащую в плоскости α. Проведем через точку C прямую m', параллельную как l_1, так и l_2. Прямая m' совпадает с прямой m (иначе через точку C, не лежащую на прямой l_2, проходили бы две прямые, параллельные l_2). Следовательно, $m \parallel l_1$.

7.1.5. Сохранение величин углов при параллельном переносе. Важным свойством углов в стереометрии является сохранение их величин при параллельном переносе.

Пусть имеется угол $\angle A_1O_1B_1$ и точка O_2 вне плоскости этого угла. Перенесем параллельно стороны угла O_1A_1 и O_1B_1, достроив $\triangle O_1A_1O_2$ до параллелограмма $O_1A_1A_2O_2$, а $\triangle O_1B_1O_2$ — до параллелограмма $O_1B_1B_2O_2$. Требуется показать, что $\angle A_1O_1B_1 = \angle A_2O_2B_2$ (рис. 7.2).

Сначала покажем, что $A_1A_2B_2B_1$ — параллелограмм.

Поскольку прямые A_1A_2 и B_1B_2 параллельны прямой O_1O_2, они параллельны друг другу.

Пусть A_3 и B_3 — центры параллелограммов $O_1A_1A_2O_2$ и $O_1B_1B_2O_2$ (рис. 7.3). Тогда A_3B_3 — средняя линия $\triangle O_2A_1B_1$ и $A_3B_3 \parallel A_1B_1$. Аналогично, $A_3B_3 \parallel A_2B_2$. Следовательно, $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

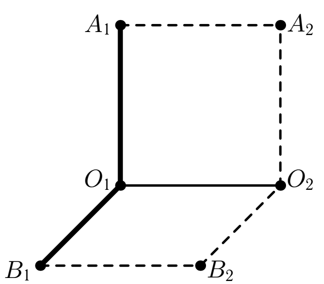

Рис. 7.2. Параллельный перенос угла

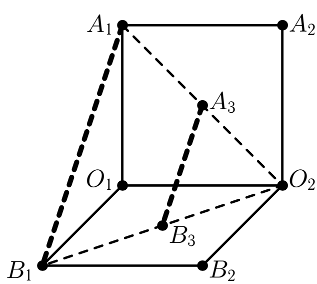

Рис. 7.3. К доказательству неизменности величины угла при переносе

Таким образом, $A_1A_2B_2B_1$ — параллелограмм.

Следовательно, $A_1B_1 = A_2B_2$ как противоположные стороны параллелограмма, $\triangle A_1O_1B_1 = \triangle A_2O_2B_2$ по трем сторонам и $\angle A_1O_1B_1 = \angle A_2O_2B_2$.

§7.2. Перпендикулярность и проектирование

7.2.1. Свойство прямой, перпендикулярной двум сторонам треугольника, и медианы этого треугольника. Пусть прямая l проходит через вершину A треугольника $\triangle ABC$ и перпендикулярна как стороне AB, так и стороне AC (рис. 7.4). Покажем, что прямая l перпендикулярна и медиане AM этого треугольника.

Выберем на прямой l точку D. Обозначим (рис. 7.5) $AD = h$, $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$. По теореме Пифагора, $BD^2 = h^2 + c^2$, $CD^2 = h^2 + b^2$. Используя результат задачи о длине медианы (глава 4) для $\triangle ABC$ и $\triangle DBC$, получим:

$$AM^2 = \frac{c^2+b^2}{2} - \frac{a^2}{4},$$

$$DM^2 = \frac{BD^2+CD^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{c^2+b^2}{2} + h^2 - \frac{a^2}{4}.$$

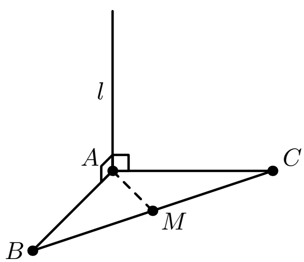

Рис. 7.4. К постановке задачи о перпендикуляре к сторонам и медиане треугольника

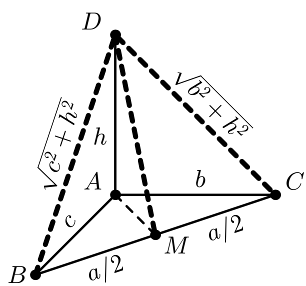

Рис. 7.5. К решению задачи о перпендикуляре к сторонам и медиане треугольника

Следовательно, $DA^2 + AM^2 = DM^2$, и по теореме косинусов $\angle DAM$ прямой. Свойство перпендикулярности доказано.

7.2.2. Перпендикулярность прямой и плоскости. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Свойство прямой, параллельной перпендикуляру к плоскости. Будем говорить, что прямая, проходящая через точку A плоскости, перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна любой прямой плоскости, проходящей через точку A (рис. 7.6).

Из доказанного свойства медианы вытекает важный признак перпендикулярности прямой и плоскости: если проходящая через точку A плоскости прямая перпендикулярна двум различным прямым плоскости, проходящим через точку A, то она перпендикулярна плоскости.

Пусть проходящая через точку A прямая l перпендикулярна прямым l_1 и l_2 плоскости. Требуется проверить, что эта прямая перпендикулярна и прямой l_3, проходящей через точку A (рис. 7.7).

Выберем на прямой l_3 точку K и проведем через нее две прямые KP и KQ, параллельные прямым l_2 и l_1 соответственно; при этом прямая KP пересекает прямую l_1 в точке P, а прямая KQ пересекает прямую l_2 в точке Q. Поскольку $APKQ$ — параллелограмм, его диагонали пересекаются в точке S и делятся точкой пересечения пополам (рис. 7.8).

Таким образом, стороны треугольника $\triangle APQ$, лежащие на прямых l_1 и l_2, перпендикулярны прямой l, поэтому и медиана этого треугольника AS также

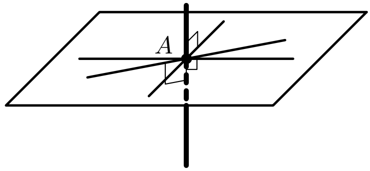

Рис. 7.6. К определению прямой, перпендикулярной плоскости

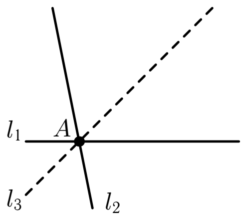

Рис. 7.7. Три прямые на плоскости

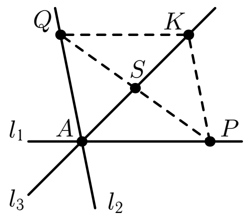

Рис. 7.8. Третья прямая как медиана

перпендикулярна прямой l. Прямая l_3, как продолжение медианы, также перпендикулярна l.

Из свойства сохранения углов (а значит и перпендикулярности прямых) при параллельном переносе вытекает важное следствие: прямая, параллельная к перпендикуляру к плоскости, также перпендикулярна к плоскости (рис. 7.9).

Пусть прямая l проходит через точку A плоскости и перпендикулярна плоскости α, а $m \parallel l$. Требуется показать, что $m \perp \alpha$ (прямая m пересекает плоскость и перпендикулярна любой прямой, проходящей через точку пересечения).

Проведем через прямые l и m плоскость. Она пересечет плоскость α по некоторой прямой, проходящей через точку A. Эта прямая пересечет прямую m в некоторой точке B (рис. 7.10).

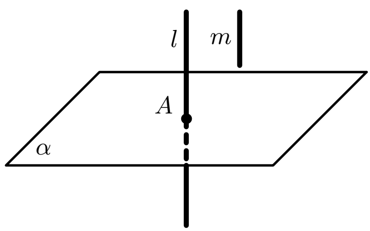

Рис. 7.9. К свойству прямой, параллельной перпендикуляру к плоскости

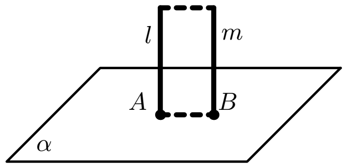

Рис. 7.10. К доказательству пересечения прямой m и плоскости α

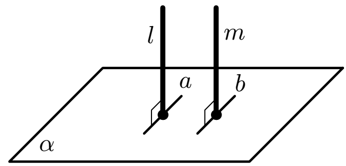

Рис. 7.11. К доказательству перпендикулярности прямой m и плоскости α

Проверим, что прямая m перпендикулярна любой прямой b, проходящей через точку B. Для этого проведем через точку A прямую $a \parallel b$; тогда $l \perp a$ и $m \perp b$ (рис. 7.11). Таким образом, $m \perp \alpha$.

7.2.3. Проектирование точки на плоскость путем последовательного проектирования на две прямые. Единственность перпендикуляра, проведенного к плоскости из данной точки. Важным методом исслеодования пространственных фигур в пространстве является проектирование на плоскость: плоские фигуры — проекции пространственных фигур — значительно проще представить наглядно.

Пусть A — точка вне плоскости α. Тогда точка A_1 плоскости называется *проекцией* точки A на плоскость, если $AA_1 \perp \alpha$ [1]) (рис. 7.12).

Как построить проекцию точки на плоскость? Можно сначала построить проекцию A_2 точки A на прямую l в

[1]) Точка, лежащая в плоскости, при проектировании остается на месте

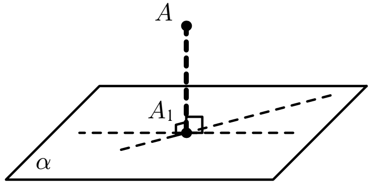

Рис. 7.12. Проекция точки на плоскость

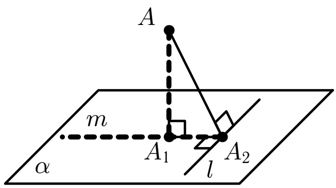

Рис. 7.13. Метод проектирования на плоскость

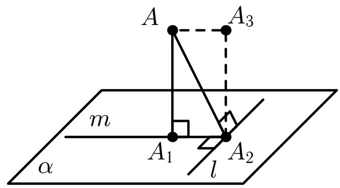

Рис. 7.14. К обоснованию метода проектирования на плоскость

этой плоскости, опустив перпендикуляр $AA_2 \perp l$. Через точку A_2 проведем прямую m в плоскости α, перпендикулярную l. Если оказалось, что $AA_2 \perp m$, то прямая AA_2 перпендикулярна плоскости, и проекция A_2 построена. В противном случае опустим перпендикуляр AA_1 на прямую m (рис. 7.13).

Покажем, что $AA_1 \perp \alpha$ и точка A_1 является проекцией точки A на плоскость α.

Достроим прямоугольный треугольника $\triangle AA_1A_2$ до прямоугольника $AA_1A_2A_3$ (рис. 7.14). Прямая l, как перпендикулярная прямым A_2A_1 и A_2A, перпендикулярна и прямой A_2A_3. Прямая A_2A_3 перпендикулярна не только прямой l, но и прямой m — она перпендикулярна плоскости α. Прямая AA_1, параллельная A_2A_3, также перпендикулярна плоскости α.

Покажем, что теперь, что через одну точку нельзя провести два перпендикуляра к плоскости.

Пусть через некоторую точку проведено два перпендикуляра к плоскости α. Проведем через эти перпендикуляры плоскость, пересекающую плоскость α по некото-

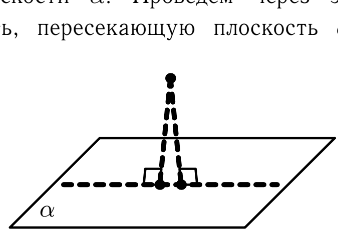

Рис. 7.15. Два перпендикуляра к плоскости из одной точки

рой прямой. Эта прямая плоскости перпендикулярна обоим перпендикулярам — получено противоречие [1] (рис. 7.15).

7.2.4. Проектирование точки, делящей отрезок в данном отношении, на плоскость. Пусть точка K делит отрезок AB в заданном отношении. Покажем, что при проектировании на плоскость α это отношение сохраняется.

Пусть точка A не лежит в плоскости α [2]. Опустим из точки A перпендикуляр AA_1 на плоскость и проведем через прямые AA_1 и AB плоскость [3] β, пересекающую плоскость α по прямой m. В плоскости β построим проекции точек K и B на прямую m — точки K_1 и B_1 (рис. 7.16).

Тогда $A_1K_1 : K_1B_1 = AK : KB$. С другой стороны, поскольку $BB_1 \parallel KK_1 \parallel AA_1$, точки K_1 и B_1 будут являться проекциями точек K и B на плоскость α.

7.2.5. Проектирование точки на плоскость с использованием известного перпендикуляра к плоскости. Второй способ спроектировать точку A на плоскость — использовать известный перпендикуляр l к плоскости, пересекающий плоскость α в точке S (рис. 7.17).

---

[1] Рассуждение справедливо как в случае, когда точка принадлежит в плоскости, так и в случае точки вне плоскости

[2] Случай, когда оба конца отрезка A и B лежат в плоскости α, читателю предлагается рассмотреть самостоятельно

[3] Изучение случая $AB \perp \alpha$ также предоставляется читателю

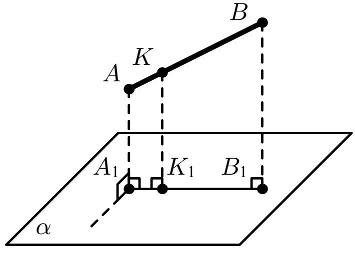

Рис. 7.16. Метод проектирования отрезка на плоскость

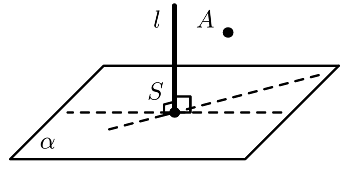

Рис. 7.17. Точка пространства и перпендикуляр к плоскости

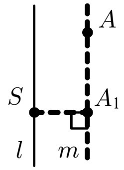

Рис. 7.18. Построение проекции

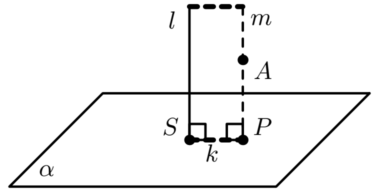

Рис. 7.19. К обоснованию построения

Проведем через точку A прямую m, параллельную l. Опустим из точки S перпендикуляр SA_1 на прямую m (рис. 7.18). Покажем, что точка A_1 будет проекцией точки A на плоскость.

Проведем через прямые l и m плоскость, пересекающую плоскость α по некоторой прямой k (рис. 7.19). Она пересекает прямую m в некоторой точке P. При этом $SP \perp m$, поэтому точка P совпадает с точкой A_1. Поскольку прямая m, совпадающая с AA_1, перпендикулярна α, точка A_1 является проекцией точки A на плоскость.

7.2.6. Параллельность плоскостей с общим перпендикуляром. Построение общего перпендикуляра к параллельным плоскостям. Покажем, что две плоскости α и β с общим перпендикуляром l параллельны (не имеют общих точек) или совпадают.

Пусть плоскости α и β имеют общую точку S — общий перпендикуляр $m \parallel l$ можно провести через S. Процедуры проектирования любой точки на плоскости α и β с использованием перпендикуляра m дают одинаковые проекции — плоскости α и β совпадают.

Построим общий перпендикуляр к параллельным плоскостям.

Пусть α и β — две параллельные плоскости, B — точка плоскости β, A — ее проекция на плоскость α ($AB \perp \alpha$). Покажем, что прямая AB перпендикулярна плоскости β, то есть любой прямой l, проходящей через точку B.

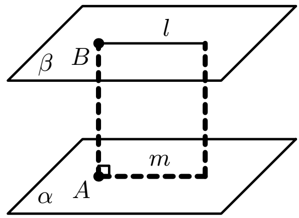

Рис. 7.20. Общий перпендикуляр к параллельным плоскостям

Проведем через прямые AB и l плоскость γ, пересекающую плоскость α по прямой m, не пересекающейся с l ввиду параллельности $\alpha \parallel \beta$ (рис. 7.20). Из свойств $AB \perp m$ и $m \parallel l$ получим: $AB \perp m$.

7.2.7. Проектирование сначала на плоскость, а затем на прямую в ней, и проектирование сразу на эту прямую. Проектирование отрезка и его середины на прямую. Иногда вместо проектирования сразу на прямую может оказаться полезным спроектировать фигуру сначала на плоскость и только затем — на прямую в ней. Покажем, что эти две операции приводят к одному результату.

Пусть имеется плоскость α и прямая l в ней, A — точка вне плоскости α, A_1 — проекция точки A на плоскость, A_2 — проекция точки A_1 на прямую l (рис. 7.21). Покажем, что A_2 совпадает с проекцией точки A на прямую l.

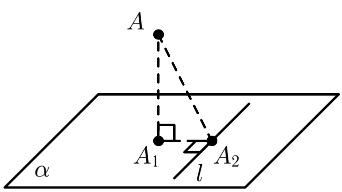

Рис. 7.21. Два способа проектирования на прямую

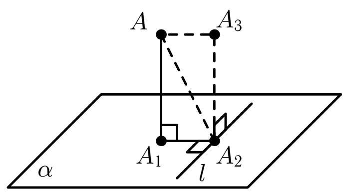

Рис. 7.22. К обоснованию способа

Достроим прямоугольный треугольник $\triangle AA_1A_2$ до прямоугольника $AA_1A_2A_3$ (рис. 7.22). Прямая A_2A_3, как параллельная перпендикуляру AA_1 к плоскости α, также перпендикулярна плоскости α. Следовательно, $A_2A_3 \perp l$. Поскольку прямая l также перпендикулярна и прямой A_1A_2, $l \perp AA_2$. Таким образом, A_2 — проекция точки A на прямую l.

Проектирование отрезка на прямую, даже не лежащую в плоскости отрезка, можно представить как композицию проектирования сначала на плоскость, а затем на прямую в плоскости. При каждой из этих операций середина отрезка переходит в середину.

§7.3. Координаты и векторы в стереометрии

7.3.1. Декартова прямоугольная система координат в пространстве. Координаты точки. Построение и единственность точки с заданными координатами. Декартова прямоугольная система координат в пространстве представляет собой три взаимно перпендикулярные оси x, y и z, пересекающиеся в начале координат O (рис. 7.23). Чтобы построить систему координат, сначала можно выбрать плоскость в пространстве, ввести на ней систему координат из осей x и y, а затем через начало координат провести

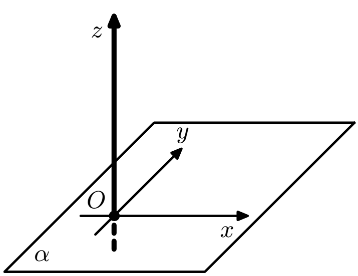

Рис. 7.23. Система координат

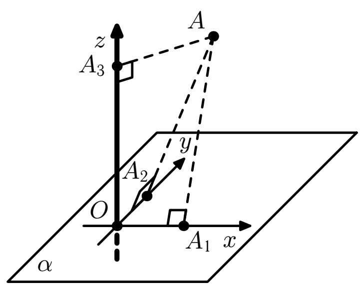

Рис. 7.24. Проектирование точки на оси

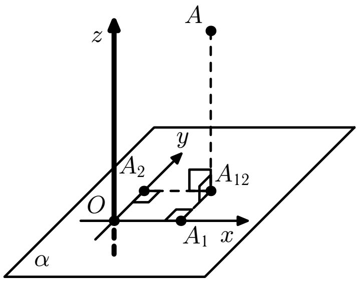

Рис. 7.25. Последовательное проектирование на плоскость и оси

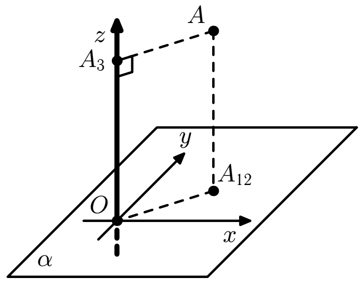

Рис. 7.26. К построению точки с данными координатами

ось z, перпендикулярную плоскости Oxy, проходящей через пересекающиеся в точке O оси x и y.

Пусть A — точка в пространстве, A_1 — ее проеция на ось x с координатой x_A, A_2 — ее проекция на ось y с координатой y_A, A_3 — ее проекция на ось z с координатой z_A (рис. 7.24). Значения $(x_A; y_A; z_A)$ называют *координатами* точки A. Отметим, что проекция A_{12} точки A на плоскость Oxy при проектировании на оси x и y также будет (рис. 7.25) попадать в точки A_1 и A_2

Действительно, последовательно спроектировать точку на плоскость и прямую в ней — все равно, что спроектировать точку сразу на прямую.

Рассмотрим задачу о построении точки A с заданными координатами.

Пусть A_3 — точка на оси z с координатой z_A, A_{12} — точка плоскости Oxy с координатами $(x_A; y_A)$. Требуется построить точку A, проекция которой на ось z совпадает с A_3, а на плоскость Oxy — совпадает с A_{12} (рис. 7.26). Поскольку прямая AA_{12} должна быть параллельна оси z, точки O, A_3, A_{12}, A должны лежать в одной плоскости и образовывать прямоугольник. Поскольку прямоугольный треугольник $\triangle OA_3A_{12}$ достраивается до прямоугольника единственным способом, точка A с данными координатами существует и единственна.

7.3.2. Вектор в пространстве и его компоненты. Равенство векторов (геометрическое определение) и их компонент. Как и в случае прямой и плоскости, вектор в пространстве $\overrightarrow{AB}$ начинается в точке A и заканчивается в точке B. Величины

$$(AB)_x = x_B - x_A, \quad (AB)_y = y_B - y_A, \quad (AB)_z = z_B - z_A$$

называются *компонентами* вектора $\overrightarrow{AB}$.

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ считаются равными, если середины отрезков AD и BC совпадают. Поскольку при проектировании на координатные оси середины отрезков переходят в середины, серединой отрезка AD является точка с координатами $((x_A + x_D)/2; (y_A + y_D)/2; (z_A + z_D)/2)$, а серединой отрезка BC — точка с координатами $((x_B + x_C)/2; (y_B + y_C)/2; (z_B + z_C)/2)$. Запишем свойство равенства векторов в координатном виде:

$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_D}{2} = \dfrac{x_B + x_C}{2}; \\[2ex] \dfrac{y_A + y_D}{2} = \dfrac{y_B + y_C}{2}; \\[2ex] \dfrac{z_A + z_D}{2} = \dfrac{z_B + z_C}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_B - x_A = x_D - x_C; \\[2ex] y_B - y_A = y_D - y_C; \\[2ex] z_B - z_A = z_D - z_C. \end{cases}$$

Следовательно, векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны тогда и только тогда, когда равны их компоненты:

$$(AB)_x = (CD)_x; \quad (AB)_y = (CD)_y; \quad (AB)_z = (CD)_z.$$

7.3.3. Откладывание от данной точки вектора с заданными компонентами. Параллельный перенос на заданный вектор (определение, сохранение компонент векторов и длин отрезков). Чтобы отложить от точки A с координатами $(x_A; y_A; z_A)$ вектор $\overrightarrow{a}$ с компонентами $(a_x; a_y; a_z)$, следует подобрать точку B с координатами $(x_A + a_x; y_A + a_y; z_A + a_z)$ — тогда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$. В этом случае говорят, что точка B получена из точки A параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{a}$.

При параллельном переносе вектор $\overrightarrow{AC}$ переходит в такой вектор $\overrightarrow{BD}$, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{a}$. При этом $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ — компоненты и длины векторов при параллельном переносе сохраняются.

7.3.4. Сложение векторов и умножение вектора на число (определение, поведение проекций и компонент векторов). Векторы в пространстве складываются и умножаются на число точно так же, как и на плоскости. Суммой векторов $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b}$ считается вектор $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$. При проектировании на прямую точки A, B и C переходят в точки A_1, B_1 и C_1, вектор $\overrightarrow{AB}$ переходит в вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$, вектор $\overrightarrow{BC}$ — в вектор $\overrightarrow{B_1C_1}$, вектор — $\overrightarrow{AC}$ — в вектор $\overrightarrow{A_1C_1}$. Таким образом, при проектировании сумма векторов переходит в сумму проекций.

Поскольку отношения отрезков при проектировании сохраняются, проекция произведения вектора $\overrightarrow{a}$ на число k равна произведению проекции вектора $\overrightarrow{a}$ на это число.

Следовательно, при сложении векторов их компоненты складываются, при умножении на число — умножаются на это же число.

7.3.5. Длина вектора с заданными компонентами и длина отрезка с заданными координатами концов. Рассчитаем длину вектора $\overrightarrow{a}$ с компонентами $(a_x; a_y; a_z)$.

Отложим от начала координат O вектор $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$ (рис. 7.27); тогда координаты точки A будут равны

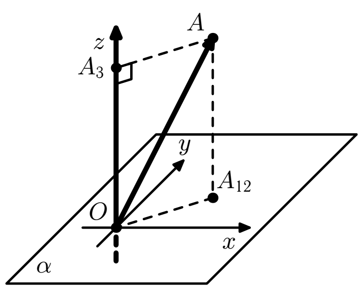

Рис. 7.27. К расчету длины вектора

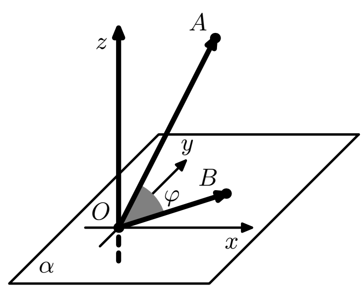

Рис. 7.28. К расчету косинуса угла

$(a_x; a_y; a_z)$. Пусть A_3 — проекция точки A на ось z (A_3 имеет координату a_z), A_{12} — проекция точки A на плоскость Oxy (A_{12} имеет координаты $(a_x; a_y)$). Квадрат длины диагонали OA прямоугольника OA_3AA_{12} равен

$$OA^2 = OA_3^2 + OA_{12}^2 = a_z^2 + a_x^2 + a_y^2.$$

Следовательно, длина вектора $\overrightarrow{a}$ составляет

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \qquad (7.1)$$

Длину отрезка AB с заданными координатами концов можно рассчитать по формуле (7.1):

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}\,.$$

7.3.6. Расчет косинуса угла между векторами в пространстве. Скалярное произведение векторов в пространстве. Рассчитаем косинус угла φ между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ с заданными компонентами.

Отложим векторы $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$ от начала координат O, построив точки A и B с координатами $(a_x; a_y; a_z)$ и $(b_x; b_y; b_z)$ соответственно (рис. 7.28). Для расчета косинуса угла $\varphi = \angle AOB$ применим теорему косинусов:

$$OA^2 + OB^2 - AB^2 = 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\varphi. \qquad (7.2)$$

Используя выражения для длин отрезков

$$AB^2 = (b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2,$$

$$OA^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2, \qquad OB^2 = b_x^2 + b_y^2 + b_z^2,$$

приведем левую часть соотнощения (7.2) к виду:

$$OA^2 + OB^2 - AB^2 = 2(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z).$$

Выражая косинус угла, находим:

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{OA \cdot OB}. \qquad (7.3)$$

Поскольку соотношение (7.3) часто используется при расчете косинусов углов в пространстве, для числителя дроби (7.3) ввели специальное наименование — *скалярное произведение* векторов — и обозначение

$$(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

С учетом введенного обозначения

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}.$$