Глава 6

КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ

§6.1. Координаты и векторы на прямой

6.1.1. Координатная ось. Координата точки на оси. Длина отрезка с заданными координатами концов. Координата точки, делящей отрезок в заданном отношении $m : n$. Координата середины отрезка. Как описать положение точки на прямой с помощью числа? Для этого следует выбрать на прямой *начало координат*, разбивающую прямую на две дополнительные полупрямые: одну из них следет считать «положительной», другую — «отрицательной». Положительная полуось отмечается на рисунке стрелкой. Координата точки положительной полуоси (рис. 6.1) является положительным числом, отрицательной — отрицательным числом, координата начала координат равна нулю. Модуль координаты равен расстоянию от точки до начала координат.

Пусть на прямой выбраны две точки A и B с координатами x_A и x_B соответственно. Тогда длина отрезка AB

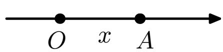

Рис. 6.1. Точка A на координатной оси

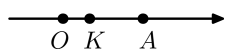

Рис. 6.2. Точка K делит отрезок AB в отношении $m : n$

составляет [1])

$$AB = |x_B - x_A|. \tag{6.1}$$

Найдем координату x_K точки K, делящей отрезок AB в отношении $AK : KB = m : n$ (рис. 6.2). Для определенности предположим [2]), что $x_A < x_B$.

Используя формулу (6.1) для длины отрезка, получим:

$$\frac{x_K - x_A}{x_B - x_K} = \frac{m}{n} \quad \Longleftrightarrow \quad m(x_B - x_K) = n(x_K - x_A).$$

Решая уравнение, найдем:

$$x_K = \frac{mx_B + nx_A}{m+n}.$$

В частности, координата середины отрезка AB оказывается равной $(x_A + x_B)/2$.

6.1.2. Понятие о векторе. Компонента вектора на оси. Равенство векторов, сложение векторов и умножение вектора на число (определение через компоненты и геометрическое определение). Процесс перемещения из точки A в точку B изображается на рисунке стрелкой, начинающейся в точке A и заканчивающейся в точке B. Такая стрелка называется *вектором* $\overrightarrow{AB}$ (рис. 6.3).

Если A и B — точки координатной оси с координатами x_A и x_B, *компонентой* вектора $\overrightarrow{AB}$ на оси x называют величину

$$(AB)_x = x_B - x_A.$$

[1]) Читателю предлагается проверить формулу (6.1) при различных случаях взаимного расположения точек A, B и начала координат O.

[2]) Второй случай предлагается рассмотреть читателю

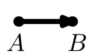

Рис. 6.3. Вектор

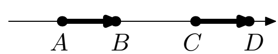

Рис. 6.4. Равные векторы на прямой

Понятие компоненты[1] позволяет описать геометрический объект — вектор — *в виде числа*. Многие операции с векторами можно вводить двумя способами: и геометрически, и с помощью компонент.

Говорят, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны (рис. 6.4), если их компоненты одинаковы:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff x_B - x_A = x_D - x_C.$$

Но это определение можно сформулировать и по-другому: $(x_A + x_D)/2 = (x_B + x_C)/2$. Поэтому $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ тогда и только тогда, когда середины отрезков AD и BC совпадают[2]. Это геометрическое определение равенства векторов переносится и на плоскость, и на пространство.

Пусть $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ — векторы с компонентами a_x и b_x. Согласно алгебраическому определению, суммой векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ называется вектор $\overrightarrow{c}$, имеющий компоненту $c_x = a_x + b_x$.

Можно дать и геометрическое определение суммы векторов. Отложим от точки A вектор $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$ (точка B имеет координату $x_A + a_x$), затем от точки B — вектор $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b}$ (точка C имеет координату $x_A + a_x + b_x$). Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ (рис. 6.5) будет иметь компоненту $a_x + b_x$ и являться таким образом суммой векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

[1] В школьных учебниках вместо термина «компонента вектора» используется «координата вектора». Однако в физике встречаются векторы скорости, силы и т.д. Словосочетания «x-координата силы» и «x-координата скорости» звучат не очень хорошо — этим и обусловлено использование в книге слова «компонента» вместо «координата»

[2] Если точки A и B совпадают, условимся считать серединой «отрезка» AB точку, совпадающую с A и B

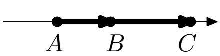

Рис. 6.5. Сложение векторов

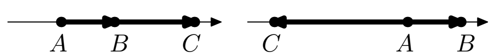

Рис. 6.6. Умножение вектора на число $k > 0$ (слева) и $k < 0$ (справа)

Что касается произведения $\overrightarrow{c} = k\overrightarrow{a}$ вектора $\overrightarrow{a}$ на число k, то, согласно алгебраическому определению, оно имеет компоненту, в k раз превосходящую компоненту a_x вектора $\overrightarrow{a}$: $c_x = ka_x$.

Можно сформулировать и геометрическое определение. Пусть требуется умножить вектор $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$ на число k. Тогда следует отложить на прямой AB от точки A отрезок $AC = |k| \cdot |AB|$; при положительном k точка C выбирается на полупрямой AB, при отрицательном — на дополнительной полупрямой (рис. 6.6). Вектор $\overrightarrow{AC}$ и будет являться искомым произведением: $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

§6.2. Координаты и векторы на плоскости

6.2.1. Проектирование на прямую в геометрии на плоскости. Декартова прямоугольная система координат. Координаты точки на плоскости. Построение и единственность точки с заданными координатами. Чтобы получить хоть какую-то количественную информацию о положении точки на плоскости, можно использовать операцию *проектирования на прямую* (рис. 6.7). Пусть A — точка, не лежащая на прямой l. Точка A_1 называется *проекцией* точки A на прямую l, если $AA_1 \perp l$ [1]).

Чтобы *полностью* описать положение точки на плоскости, можно ввести *декартову прямоугольную систему координат* — две взаимно перпендикулярные координат-

[1]) Если точка A лежит на прямой l, она сама и является проекцией на эту прямую

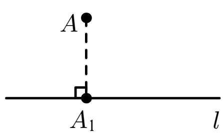

Рис. 6.7. Проектирование точки A на прямую l

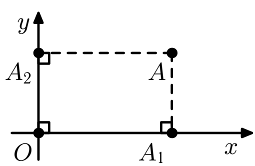

Рис. 6.8. Декартова прямоугольная система координат

ные оси (они обычно обозначаются как x и y), начало координат на которых выбирается в точке пересечения O (рис. 6.8). Если A — точка плоскости, можно рассмотреть ее проекцию A_1 на ось x (с координатой x_A) и проекцию A_2 на ось y (с координатой y_A). Тем самым всякую точку A можно описать совокупностью двух чисел — координат $(x_A; y_A)$.

Чтобы построить точку A с заданными координатами $(x_A; y_A)$, следует сначала построить точку A_1 с координатой x_A на оси x и точку A_2 с координатой y_A на оси y, а затем — достроить прямоугольный треугольник $\triangle OA_1A_2$ до прямоугольника OA_1AA_2. Поскольку такое достраивание единственно, точка A с заданными координатами также строится единственным образом [1].

6.2.2. Проектирование точки, делящий отрезок в данном отношении. Координаты середины отрезка. Пусть отрезок AB и точка K на нем спроектированы на прямую l — получена проекция A_1B_1 отрезка и проекция K_1 точки на нем (рис. 6.9). Покажем, что

$$A_1K_1 : K_1B_1 = AK : KB \tag{6.2}$$

Проведем через точку K прямую m, параллельную l. Спроектируем точки A и B на прямую m: точку A —

[1] Случай, когда одна из проекций точки A совпадает с началом координат, читателю предлагается рассмотреть самостоятельно.

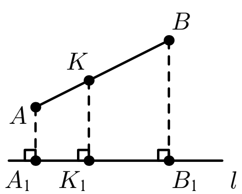

Рис. 6.9. Проектирование точек отрезка на прямую

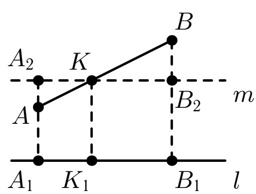

Рис. 6.10. К доказательству свойств пропорциональных отрезков

в точку A_2, точку B — в точку B_2 (рис. 6.10). Тогда $\triangle KAA_2 \sim \triangle KBB_2$ и $A_2K : KB_2 = AK : KB$. Так как проекции отрезков на прямые l и m совпадают как противоположные стороны прямоугольника, приходим к соотношению (6.2).

Частным случаем соотношения (6.2) является следующее свойство: середина отрезка при проектировании переходит в середину. Следовательно, координаты середины C отрезка AB равны среднему арифметическому координат концов:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}, \qquad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

6.2.3. Вектор на плоскости и его компоненты. Равенство векторов (геометрическое определение) и равенство компонент. Параллельность и равенство длин равных векторов. Процесс перемещения из точки A в точку B плоскости можно изобразить вектором $\overrightarrow{AB}$, начинающимся в точке A и заканчивающимся в точке B. Компоненты вектора $\overrightarrow{AB}$

$$(AB)_x = x_B - x_A, \qquad (AB)_y = y_B - y_A$$

показывают, на какое расстояние произошло перемещение вдоль оси x и вдоль оси y.

Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ будем называть *равными* (рис. 6.11), если середины отрезков AD и BC совпадают:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x_A + x_D}{2} = \dfrac{x_B + x_C}{2}; \\[2ex] \dfrac{y_A + y_D}{2} = \dfrac{y_B + y_C}{2} \end{cases}$$

Поскольку данное свойство можно представить и в эквивалентном виде:

$$\begin{cases} x_B - x_A = x_D - x_C; \\[2ex] y_B - y_A = y_D - y_C. \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (AB)_x = (CD)_x; \\[2ex] (AB)_y = (CD)_y. \end{cases}$$

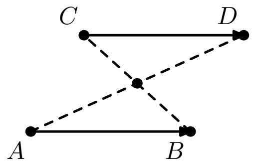

Рис. 6.11. Определение равенства векторов через середины отрезков

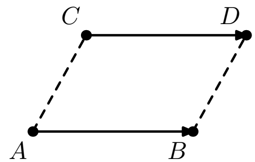

Рис. 6.12. Определение равенства векторов через параллелограмм

два вектора оказываются равными тогда и только тогда, когда обе их компонеты совпадают.

По признаку и свойству параллелограмма, не лежащие на одной прямой векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ оказываются равны тогда и только тогда, когда $ABDC$ — параллелограмм (рис. 6.12). Поэтому равные векторы параллельны[1)] и имеют равные длины (по свойству противоположных сторон параллелограмма).

6.2.4. Откладывание от данной точки вектора с заданными компонентами. Параллельный перенос на заданный вектор (определение, сохранение компонент векторов и длин отрезков). Пусть $\overrightarrow{a}$ — заданный вектор, с компонентами $(a_x; a_y)$. Чтобы отложить от точки A с координатами $(x_A; y_A)$ вектор $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$, следует построить точку B с координатами $(x_A + a_x; y_A + a_y)$. Говорят, что точка B получена из точки A *параллельным переносом* на вектор $\overrightarrow{a}$ (рис. 6.13).

1) или лежат на одной прямой

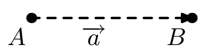

Рис. 6.13. Параллельный перенос на заданный вектор

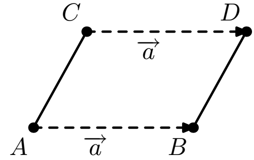

Рис. 6.14. Параллельный перенос отрезка

Пусть при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{a}$ точка A переходит в B, а точка C переходит в D. Это означает, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ (рис. 6.14). Таким образом, вектор $\overrightarrow{BD}$, в который переходит вектор $\overrightarrow{AC}$ при параллельном переносе, равен вектору $\overrightarrow{AC}$, имеет одинаковые с ним компоненты и одинаковую длину.

6.2.5. Сложение векторов и умножение вектора на число (определение, поведение проекций и компонент векторов). Как сложить два вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ на плоскости? Следует сначала отложить вектор $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$ от точки A, затем — вектор $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{b}$ от точки B. Тогда вектор $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{c}$ будет являться суммой векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ (рис. 6.15).

Другой способ построения суммы векторов, не лежащих на одной прямой, заключается в том, чтобы отложить векторы $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{b}$ от одной точки и достроить $\triangle ABC$ до параллелограмма $ABCD$ — вектор $\overrightarrow{BD}$ окажется равен вектору $\overrightarrow{AC}$, а вектор $\overrightarrow{AD}$ — сумме $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ (рис. 6.16).

При проектировании на ось x проекции $\overrightarrow{a}_1$ и $\overrightarrow{b_1}$ векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ в сумме дают проекцию вектора $\overrightarrow{c}$ (рис. 6.17). Следовательно, $c_x = a_x + b_x$. Аналогично, $c_y = a_y + b_y$. Таким образом, при сложении векторов их компоненты также складываются.

Для умножения вектора на число за пределы прямой выходить не нужно — эта операция уже была определена. Так как отношения отрезков при проектировании сохра-

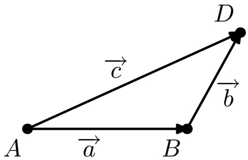

Рис. 6.15. Сложение векторов по правилу треугольника

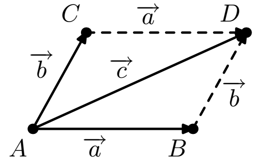

Рис. 6.16. Сложение векторов по правилу параллелограмма

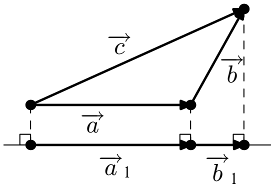

Рис. 6.17. Сложение проекций векторов

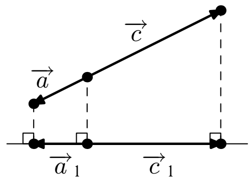

Рис. 6.18. Умножение проекции вектора на число

няются, проекция $\vec{c}_1$ вектора $\vec{c} = k\vec{a}$ в k раз больше проекции $\vec{a}_1$ вектора $\vec{a}$ (рис. 6.18). Таким образом, $c_x = ka_x$. Аналогично, $c_y = ka_y$ — при умножении вектора на число его компоненты также умножаются на это число.

§6.3. Вычисления в методе координат

6.3.1. Длина вектора с заданными компонентами и длина отрезка с заданными координатами концов. Рассмотрим задачу о расчете длины вектора $\vec{a}$ с компонентами $(a_x; a_y)$.

Отложим вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ от начала координат: точка A имеет координаты $(a_x; a_y)$ и проекции A_1 и A_2 на координатные оси (рис. 6.19). Длина вектора $\vec{a}$ совпадает с длиной диагонали прямоугольника OA_1AA_2, которая равна $OA = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$. Таким образом,

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \tag{6.3}$$

Длина отрезка AB с заданными координатами концов равна длине вектора $\overrightarrow{AB}$ с компонентами $(x_B - x_A; y_B - y_A)$; для ее расчета можно воспользоваться соотношенеим (6.3):

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

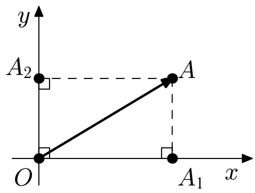

Рис. 6.19. К расчету длины вектора

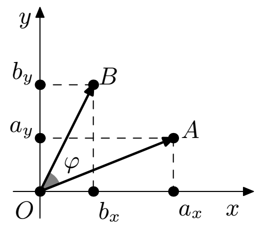

Рис. 6.20. К расчету косинуса угла между векторами

6.3.2. Расчет косинусов углов на координатной плоскости. Понятие о скалярном произведении векторов. Пусть требуется рассчитать угол между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ с известными компонентами. Если мы отложим эти векторы от одной точки, косинус этого угла можно найти из теоремы косинусов.

Отложим векторы $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$ от начала координат (рис. 6.20). Точки A и B при этом будут иметь координаты $(a_x; a_y)$ и $(b_x; b_y)$ соответственно.

Рассчитаем косинус угла $\varphi = \angle OAB$ из теоремы косинусов для $\triangle AOB$:

$$2OA \cdot OB \cos\varphi = OA^2 + OB^2 - AB^2$$

Учитывая соотношения для длин отрезков OA и OB

$$OA^2 = a_x^2 + a_y^2, \qquad OB^2 = b_x^2 + b_y^2,$$

а также отрезка AB

$$AB^2 = (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2,$$

получим:

$$OA^2 + OB^2 - AB^2 = 2a_xb_x + 2a_yb_y$$

и

$$\cos\varphi = \frac{a_xb_x + a_yb_y}{OA \cdot OB}. \tag{6.4}$$

Соотношение (6.4) часто используется при расчете косинусов углов между векторами. Для числителя дроби ввели специальное наименование — *скалярное произведение векторов* — и обозначение

$$(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) = a_x b_x + a_y b_y.$$

Тогда косинус угла между векторами можно выразить через скалярное произведение и длины векторов:

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}. \tag{6.5}$$

6.3.3. Уравнения окружности и прямой. Простейшими линиями на плоскости являются прямая и окружность. Запишем их уравнения.

Пусть прямая проходит через точку A с координатами $(x_0; y_0)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{n}$ с компонентами $(n_x; n_y)$ (рис. 6.21).

Точка K с координатами $(x; y)$ лежит на прямой тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{AK}$ с компонентами $(x - x_0; y - y_0)$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{n}$ с компонентами $(n_x; n_y)$. Это означает, что скалярное произведение этих векторов равно нулю:

$$n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) = 0. \tag{6.6}$$

Отметим, что уравнение прямой (6.6) можно записать и в других видах (выразить y через x, x через y и т.д.)

Запишем теперь уравнение окружности с центром в точке S (координаты $(x_0; y_0)$) и радиусом R (рис. 6.22).

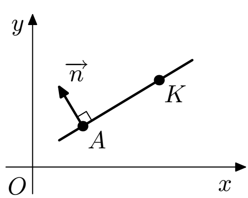

Рис. 6.21. К уравнению прямой

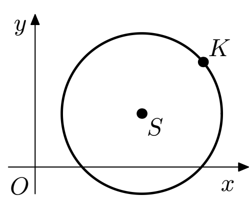

Рис. 6.22. К уравнению окружности

Учтем, что точка K лежит на окружности тогда и только тогда, когда $|\overrightarrow{KS}| = R$, то есть при:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

6.3.4. Построение вектора, перпендикулярного данному. Вращение на 90° по и против часовой стрелки. Пусть имеется вектор $\overrightarrow{a}$ с компонентами $(a_x; a_y)$. Чтобы повернуть его на 90°, следует подобрать вектор $\overrightarrow{c}$, перпендикулярный $\overrightarrow{a}$ и имеющий ту же длину, что и $\overrightarrow{a}$. Такой вектор $\overrightarrow{c}$ подбирается двумя способами (рис. 6.23). В первом случае $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{OC_1}$ имеет компоненты $(c_x = -a_y; c_y = a_x)$. Во второми случае $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{OC_2}$ имеет компоненты $(c_x = a_y; c_y = -a_x)$. Оба вектора равны по длине вектору $\overrightarrow{a}$; скалярное произведение любого из этих векторов на вектор $\overrightarrow{a}$ обращается в нуль.

Обычно оси x и y выбираются таким образом, что поворот от оси x к оси y осуществляется против часовой стрелки. Тогда вектор $\overrightarrow{OC_1}$ можно проинтерпретировать как поворот вектора $\overrightarrow{a}$ на 90° против часовой стрелки, а вектор $\overrightarrow{OC_2}$ — как поворот вектора $\overrightarrow{a}$ на 90° по часовой стрелке.

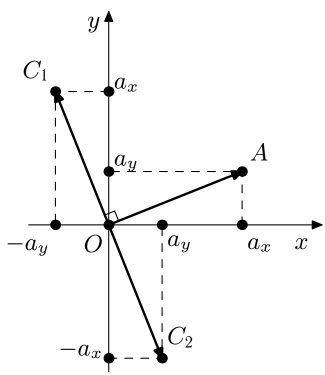

Рис. 6.23. Поворот вектора на 90°

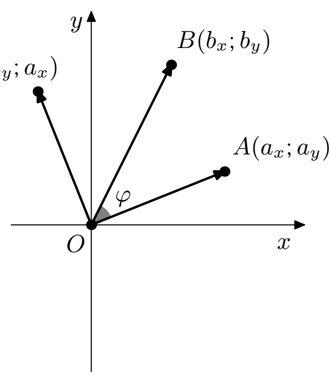

Рис. 6.24. К расчету синуса угла между векторами

6.3.5. Расчет синуса угла между векторами с учетом направления и площадь треугольника на координатной плоскости. Пусть требуется рассчитать синус угла φ между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. Поскольку $\sin\varphi = \cos(90^\circ - \varphi)$, задача сводится к уже исследованной ранее задаче о расчете косинуса угла $90^\circ - \varphi$ между векторами $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ ($\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{a}$, см. рис. 6.24).

Решим задачу, рассмотрев для определенности случай, когда поворот от вектора $\overrightarrow{a}$ к вектору $\overrightarrow{b}$ осуществляется против часовой стрелки.

Отложим векторы $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$ от начала координат O. Пусть вектор $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$ — поворот вектора $\overrightarrow{a}$ на 90° против часовой стрелки. Тогда угол между векторами $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OB}$ составляет $|90^\circ - \varphi|$, и его косинус как раз и равен синусу угла φ:

$$\sin\varphi = \frac{(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c})}{|\overrightarrow{b}| \cdot |\overrightarrow{c}|} = \frac{b_x c_x + b_y c_y}{|\overrightarrow{b}| \cdot |\overrightarrow{a}|}$$

Учитывая, что $c_x = -a_y$, а $c_y = a_x$, находим:

$$\sin\varphi = \frac{-b_x a_y + b_y a_x}{|\overrightarrow{b}| \cdot |\overrightarrow{a}|} \tag{6.7}$$

Если бы поворот от $\overrightarrow{a}$ к $\overrightarrow{b}$ осуществлялся по часовой стрелки, вектор $\overrightarrow{c}$ следовало бы получать из $\overrightarrow{a}$ поворотом по часовой стрелке — знак в соотношении (6.7) был бы противоположным.

Таким образом, в общем случае

$$\sin\varphi = \frac{|a_x b_y - a_y b_x|}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}, \tag{6.8}$$

а для знака числителя дроби (6.7) получим:

- $a_x b_y - a_y b_x > 0$, если поворот от $\overrightarrow{a}$ к $\overrightarrow{b}$ осуществляется против часовой стрелки;
- $a_x b_y - a_y b_x = 0$, если векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ лежат на одной прямой;
- $a_x b_y - a_y b_x < 0$, если поворот от $\overrightarrow{a}$ к $\overrightarrow{b}$ осуществляется по часовой стрелке.

Подставляя соотношение (6.8) в формулу для площади треугольника $S_{\triangle AOB} = 0,5 \cdot OA \cdot OB \cdot \sin\varphi$, можно выразить площадь треугольника на координатной плоскости через координанты вершин:

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|(OA)_x(OB)_y - (OA)_y(OB)_x|. \qquad (6.9)$$

§6.4. Тригонометрия ориентированных углов

Можно ли переопределить синус таким образом, чтобы формула (6.7) была справедлива всегда, а не только в случае «поворота от $\overrightarrow{a}$ к $\overrightarrow{b}$ против часовой стрелки»? Для этого следует ввести новое понятие *ориентированного угла*.

6.4.1. Понятие ориентированного угла. Положительные и отрицательные ориентированные углы. Величина ориентированного угла. Ориентированный угол $\angle(AB, AC)$ задается двумя выходящими из одной точки A полупрямыми (сторонами угла), первая из которых (AB) названа «началом ориентированного угла», а вторая (AC) — «концом ориентированного угла». Будем отмечать ориентированный угол дугой со стрелкой (рис. 6.25). Подобно тому как с помощью вектора изображается процесс перемещения из одной точки в другую, ориентированный угол описывает поворот (вокруг точки A на α радиан).

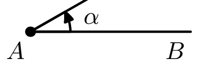

Рис. 6.25. Ориентированный угол $\alpha = \angle(AB, AC)$

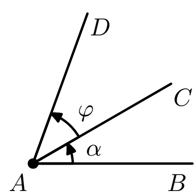

Рис. 6.26. Сложение ориентированных углов α и φ

Будем считать ориентированный угол $\angle(AB, AC)$ *положительным*, если кратчайший поворот от полупрямой AB к AC осуществляется против часовой стрелки и *отрицательным* — если по часовой стрелке. Величина положительного ориентированного угла [1] $\angle(AB, AC)$ равна $+\angle BAC$, отрицательного — равна $-\angle BAC$. Важно отметить, что от данной полупрямой можно отложить *только один* ориентированный угол, равный данному [2].

6.4.2. Сложение ориентированных углов. Равенство ориентированных углов, отличающихся на $360°$. Чтобы сложить два ориентированных угла α и φ, следует отложить от полупрямой AB ориентированный угол $\angle(AB, AC) = \alpha$, а затем от полупрямой AC — ориентированный угол $\angle(AC, AD) = \varphi$. Ориентированный угол $\angle(AB, AD)$ как раз и будет являться суммой углов α и φ (рис. 6.26).

Складывая четыре ориентированных угла $+90°$, мы получим (рис. 6.27) ориентированный угол $\angle(OA, OA)$, равный $0°$. Поэтому ориентированные углы в $360°$ и $0°$ следует считать равными. Обобщая данный вывод, отметим, что любые два угла, отличающиеся на $360°$, равны [3].

6.4.3. Косинус и синус ориентированного угла, их расчет и изображение на координатной плоскости. Назовем косинусом ориентированного угла $\angle(AB, AC)$ косинус угла $\angle BAC$. Синус положительного ориентированного угла $\angle(AB, AC)$ примем равным $+\sin\angle BAC$, синус отрицательного ориентированного угла $\angle(AB, AC)$ —

[1] На рис. 6.23 $\angle(OA, OC_1) = +90°$, $\angle(OA, OC_2) = -90°$

[2] Обычных углов можно отложить два: на рис. 6.23 от полупрямой OA отложены углы $\angle AOC_1$ и $\angle AOC_2$, равные $90°$. Хотя $\angle AOC_1 = \angle AOC_2$, $\angle(OA, OC_1) \neq \angle(OA, OC_2)$

[3] Например, ориентированный угол $+270°$, получающийся сложением трех положительных прямых ориентированных углов, равен ориентированному углу $-90°$; дополнительные полупрямые образуют ориентированный угол, равный как $+180°$, так и $+180°$

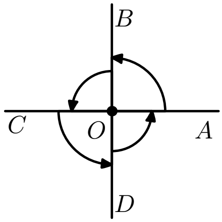

Рис. 6.27. Сложение четырех ориентированных углов $+90°$

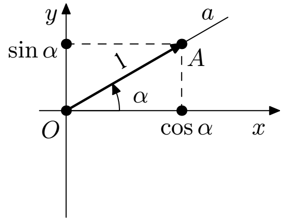

Рис. 6.28. Изображение косинуса и синуса ориентированного угла

равным $-\sin\angle BAC$; синус ориентированного угла в $0°$ или $\pm180°$ примем равным нулю.

Из полученных ранее соотношений (6.5) и (6.8) получим формулы для расчета тригонометрических функций ориентированных углов на координатной плоскости:

$$\cos\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}, \quad \sin\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{a_x b_y - a_y b_x}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}. \quad (6.10)$$

Чтобы изобразить синус и косинус ориентированного угла α графически, следует отложить угол $\angle(Ox, a) = \alpha$ от координатной оси Ox, а затем — отрезок $OA = 1$ на полупрямой a (рис. 6.28). Координаты построенной точки $A(\cos\alpha; \sin\alpha)$ будут совпадать с тригонометрическими функциями ориентированного угла α.

6.4.4. Тригонометрические функции числа, их периодичность и (не)четность. Тангенс и котангенс. Косинусом (синусом) числа[1] α называют косинус (синус) ориентированного угла в α радиан. Поскольку углы, отличающиеся на 2π радиан, равны, справедливы свойства периодичности:

$$\cos(\alpha \pm 2\pi) = \cos\alpha, \qquad \sin(\alpha \pm 2\pi) = \sin\alpha.$$

При изменении знака ориентированного угла α косинус не

[1] Читателю предлагается самостоятельно составить таблицу косинусов и синусов различных чисел и построить графики функций $y(\alpha) = \cos\alpha$ и $y(\alpha) = \sin\alpha$

меняет знак, синус — меняет. Следовательно,

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha, \qquad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

Тангенс и котангенс как ориентированного угла, так и числа, выражаются через синус и косинус:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

6.4.5. Формулы сложения для косинуса и синуса. Используя метод координат, выразим косинус и синус ориентированного угла $\alpha + \beta$ через тригонометрические функции углов α и β.

Отложим от оси Ox ориентированные углы $\angle(Ox, l) = -\alpha$ (при этом $\angle(l, Ox) = \alpha$) и $\angle(Ox, m) = \beta$, а на полупрямых l и m — единичные векторы $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$ (рис. 6.29). Тогда $\angle(OA, OB) = \alpha + \beta$. По формулам (6.10) получим:

$$\cos(\alpha + \beta) = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = a_x b_y - a_y b_x = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

6.4.6. Обратные тригонометрические функции. Представим себе, что требуется решить уравнение

$$\cos\alpha = b,$$

где b — известный параметр, α — неизвестное число.

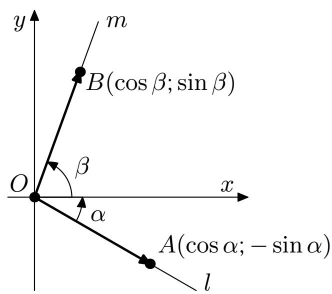

Рис. 6.29. К выводу формул сложения

Поскольку косинус может принимать значения в интервале от -1 до $+1$ включительно, уравнение представляет интерес только при $-1 \leqslant b \leqslant 1$. В этом случае оно имеет бесконечно много решений: меняя знак α, прибавляя и вычитая 2π, мы не изменим значение $\cos\alpha$. Однако одно из решений этого уравнения, лежащее в интервале $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, представляет особый интерес — для него используют специальное обозначение $\alpha = \arccos b$. Итак, *арккосинус* числа b $(-1 \leqslant b \leqslant 1)$ — это радианная мера угла (в интервале от 0 до π), косинус которого равен b.

Определения других *обратных тригонометрических функций* — арксинуса (arcsin), арктангенса (arctg) и арккотангенса (arcctg) — систематизированы в таблице 6.1.

Таблица 6.1. Обратные тригонометрические функции

Уравнение для α	**Интервал для известного параметра** b	**Промежуток, на котором ищется корень** α **уравнения**	**Обозначение для корня уравнения**
$\cos\alpha = b$	$-1 \leqslant b \leqslant 1$	$0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$	$\alpha = \arccos b$
$\sin\alpha = b$	$-1 \leqslant b \leqslant 1$	$-\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$	$\alpha = \arcsin b$
$\operatorname{tg}\alpha = b$	b любое	$-\pi/2 < \alpha < \pi/2$	$\alpha = \operatorname{arctg} b$
$\operatorname{ctg}\alpha = b$	b любое	$0 < \alpha < \pi$	$\alpha = \operatorname{arcctg} b$