

ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

§4.1. ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

4.1.1. Задача Менелая. Задача о пересечении медиан треугольника. Изучение геометрических задач на вычисление мы начнем с задачи Менелая о пересечении отрезков (рис. 4.1).

Пусть на одной стороне угла от вершины O отложены отрезок $OA = a$ и в n раз больший отрезок $OB = na$, на другой стороне — отрезки $OC = c$ и $OD = mc$ (числа $m, n > 1$ заданы). Отрезки AD и BC пересекаются в точке E . Требуется определить отношение $AE : ED$, в котором точка E делит отрезок AD .

Задачи такого типа решаются на основе свойств подобных треугольников. Однако на исходном рисунке подобные треугольники отсутствуют — их надо построить! Для этого проведем через точку A прямую AK , параллельную BC — она пересечет отрезок OC в точке K (рис. 4.2). Теперь на рисунке образованы сразу

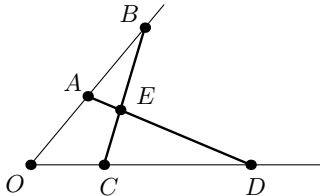


Рис. 4.1. К постановке задачи Менелая

две пары подобных треугольников: $\triangle AOK \sim \triangle BOC$ и $\triangle ADK \sim \triangle EDC$.

Воспользуемся свойствами подобных треугольников. Из подобия $\triangle AOK \sim \triangle BOC$ получим:

$$\frac{OK}{OC} = \frac{AO}{BO} = \frac{1}{n}.$$

Тогда $OK = c/n$ и $KD = (m - 1/n)c$.

Далее, из подобия $\triangle EDC \sim \triangle ADK$ находим

$$\frac{ED}{AD} = \frac{CD}{KD} = \frac{mc - c}{mc - c/n} = \frac{m - 1}{m - 1/n}.$$

Теперь можно обозначить

$$AD = (m - 1/n)l, \quad ED = (m - 1)l,$$

тогда $AE = (1 - 1/n)l$ и

$$\frac{AE}{ED} = \frac{1 - 1/n}{m - 1}. \quad (4.1)$$

Частным случаем задачи Менелая является задача о пересечении медиан треугольника.

Действительно, при $m = 2$, $n = 2$ отрезки DA и BC будут являться медианами треугольника $\triangle ODB$. Согласно полученному соотношению (4.1), в этом случае $AE : ED = 1 : 2$ — одна медиана делит другую в отношении 1:2, считая от основания (или 2:1, считая от вершины).

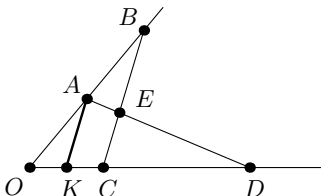


Рис. 4.2. К решению задачи Менелая

4.1.2. Задача об отношении, в котором биссектриса треугольника делит противоположную сторону. Задача о пересечении биссектрис. Пусть BL — биссектриса $\triangle ABC$ с известными сторонами $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Требуется определить отношение $k = AL : LC$, в котором биссектриса делит противоположную сторону AC треугольника, а также сами отрезки AL и LC (рис. 4.3).

Поскольку, как и в предыдущей задаче, подобные треугольники на рисунке отсутствуют, осуществим дополнительное построение: подберем на сторонах AB и BC такие точки P и Q , что $LP \parallel BC$ и $LQ \parallel AB$ (рис. 4.4).

На рисунке появились две пары равных друг другу внутренних накрест лежащих углов: $\angle PBL = \angle BLQ$ и $\angle QBL = \angle BLP$ (равные углы обозначены на рисунке одинаково); следовательно, $\triangle BQL$ и $\triangle BPL$ — равнобедренные с основанием BL , а параллелограмм $BQLP$ является ромбом.

Запишем пропорцию для сторон подобных треугольников $\triangle APL \sim \triangle LQC$:

$$\frac{AP}{LQ} = \frac{PL}{QC} = \frac{AL}{LC} = k.$$

Вводя обозначения для длин сторон треугольников (рис. 4.4) $QC = x$, $LC = y$, получаем: $PL = kx$, $AL = ky$. Поскольку $BQLP$ — ромб, имеем: $QL = BQ = BP = kx$. Вновь используя подобие, находим, что $AP = k^2x$.

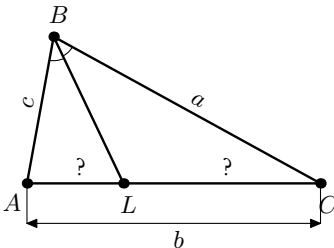


Рис. 4.3. К постановке задачи о биссектрисе треугольника

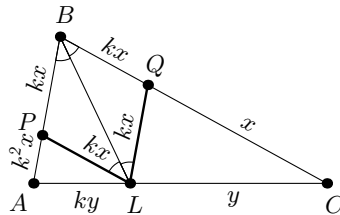


Рис. 4.4. К решению задачи о биссектрисе треугольника

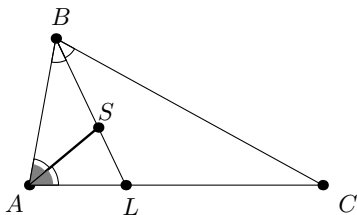


Рис. 4.5. К задаче о пересечении биссектрис

Составим уравнения для длин сторон $\triangle ABC$:

$$a = kx + x, \quad b = ky + y, \quad c = k^2x + kx.$$

Отсюда

$$k = \frac{c}{a}, \quad y = \frac{b}{k+1} = \frac{ba}{a+c}, \quad ky = \frac{bc}{a+c}.$$

Таким образом,

$$\frac{AL}{LC} = \frac{c}{a} = \frac{AB}{BC}, \quad AL = \frac{bc}{a+c}, \quad LC = \frac{ba}{a+c}. \quad (4.2)$$

Рассмотрим теперь задачу о пересечении биссектрис: установим, в каком отношении одна биссектриса треугольника делит другую. Пусть BL — биссектриса $\triangle ABC$, а биссектриса $\angle BAC$ пересекает отрезок BL в точке S . Требуется найти отношение $LS : SB$ (рис. 4.5).

Согласно задаче о биссектрисе треугольника,

$$\frac{LS}{SB} = \frac{AL}{AB} = \frac{bc/(a+c)}{c} = \frac{b}{a+c}.$$

§4.2. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

4.2.1. Задача о высоте прямоугольного треугольника. Теорема Пифагора. Одним из наиболее часто используемых геометрических соотношений является теорема Пифагора, связывающая квадраты длин катетов и гипотенузы прямоугольного треугольника. Чтобы доказать

эту теорему, рассмотрим задачу о высоте прямоугольного треугольника (рис. 4.6).

Пусть $\triangle ABC$ — прямоугольный треугольник с гипотенузой AB , длины катетов $AC = b$ и $BC = a$ заданы, CH — высота $\triangle ABC$. Требуется найти длины отрезков $BH = c_1$, $AH = c_2$, на которые высота разбивает гипотенузу треугольника, а также длину высоты $CH = h$.

На рисунке изображены сразу три подобных треугольника: $\triangle AHC \sim \triangle ACB \sim \triangle CHB$. Запишем пропорции:

$$\frac{AH}{AC} = \frac{HC}{CB} = \frac{AC}{AB} \iff \frac{c_2}{b} = \frac{h}{a} = \frac{b}{c_1 + c_2};$$

$$\frac{AC}{CH} = \frac{CB}{HB} = \frac{AB}{CB} \iff \frac{b}{h} = \frac{a}{c_1} = \frac{c_1 + c_2}{a}.$$

Из первой и второй пропорции получим:

$$b^2 = c_2(c_1 + c_2), \quad a^2 = c_1(c_1 + c_2).$$

Выполняя сложение, приходим к теореме Пифагора:

$$(c_1 + c_2)^2 = a^2 + b^2.$$

Из полученных пропорций также найдем высоту h и отрезки c_1 и c_2 :

$$h = \frac{ab}{c_1 + c_2} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$c_1 = \frac{a^2}{c_1 + c_2} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad c_2 = \frac{b^2}{c_1 + c_2} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

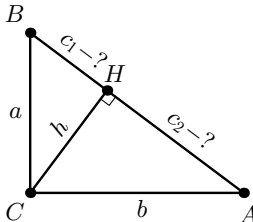


Рис. 4.6. К задаче о высоте прямоугольного треугольника

4.2.2. Задача о высоте произвольного треугольника.

Пусть в $\triangle ABC$ с известными сторонами $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ проведена высота BH . Требуется определить длину высоты h , а также длины отрезков AH и CH , на которые высота делит противоположную сторону (рис. 4.7).

Обозначим $AH = x$ и $CH = b - x$. Запишем теоремы Пифагора для $\triangle AHB$ и $\triangle CHB$:

$$x^2 + h^2 = c^2, \quad (b - x)^2 + h^2 = a^2. \quad (4.3)$$

Вычитая эти соотношения, находим:

$$(b - x)^2 - x^2 = a^2 - c^2 \iff b^2 - 2bx = a^2 - c^2.$$

Отсюда

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}. \quad (4.4)$$

Представим выражение для квадрата длины высоты в виде произведения

$$h^2 = c^2 - x^2 = (c - x)(c + x)$$

множителей

$$c - x = c - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2b} = \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{2b}$$

и

$$c + x = c + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2b} = \frac{(b + c - a)(b + c + a)}{2b}.$$

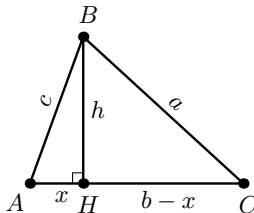
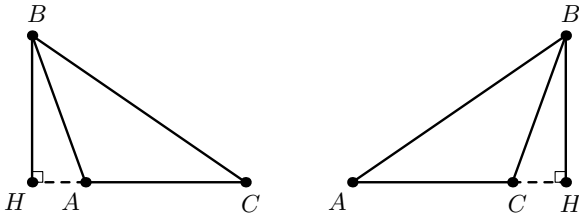


Рис. 4.7. К задаче о высоте произвольного треугольника

Рис. 4.8. Расположение высоты треугольника при $x < 0$ и $x > b$

Тогда для $h = \sqrt{(c-x)(c+x)}$ получим:

$$h = \frac{\sqrt{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}}{2b}. \quad (4.5)$$

Отметим, что величина x , подсчитанная по формуле (4.4), может оказаться отрицательной или большей b . Это будет означать, что точка H лежит не на стороне AC , а на ее продолжении. Случай $x < 0$ изображен на рисунке 4.8 слева, случай $x > b$ — справа.

4.2.3. Расчет длины медианы треугольника. Пусть в $\triangle ABC$ с известными сторонами $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ проведена медиана BM . Найдем ее длину m (рис. 4.9).

Проведем высоту BH (рис. 4.10) и воспользуемся результатом задачи о высоте. По теореме Пифагора для $\triangle BHM$ и $\triangle BHA$ находим:

$$m^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 = c^2 - x^2 + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 = c^2 + \frac{b^2}{4} - bx.$$

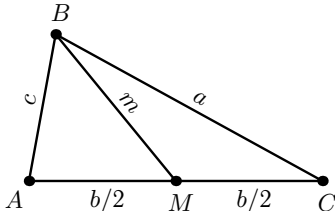


Рис. 4.9. К постановке задачи о длине медианы

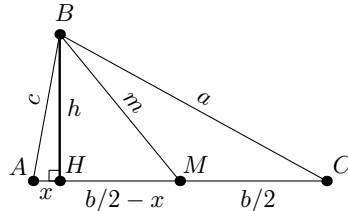


Рис. 4.10. К решению задачи о длине медианы

Учитывая соотношение (4.4) для x , получаем ответ для квадрата длины медианы:

$$m^2 = c^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}.$$

4.2.4. Расчет длины биссектрисы треугольника. Для расчета длины биссектрисы треугольника следует ввести удобные обозначения. Пусть боковые стороны треугольника равны $AB = c$, $BC = a$, а биссектриса BL делит основание AC на отрезки $AL = cy$ и $CL = ay$, пропорциональные сторонам AB и BC . Выразим длину l биссектрисы BL (рис. 4.11).

Проведем высоту BH (рис. 4.12) и воспользуемся результатами задачи о высоте. По теореме Пифагора для $\triangle BHL$ и $\triangle BHA$ имеем:

$$l^2 = h^2 + (cy - x)^2 = c^2 - x^2 + (cy - x)^2 = c^2 + c^2 y^2 - 2cxy.$$

Учтем соотношение (4.4) при $b = ay + cy = (a + c)y$:

$$\begin{aligned} 2cxy &= 2cy \cdot \frac{(a+c)^2 y^2 + (c^2 - a^2)}{2(a+c)y} = \\ &= c \cdot \frac{(a+c)^2 y^2 + (c-a)(c+a)}{(a+c)} = c \left((a+c)y^2 + (c-a) \right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$l^2 = c^2 + c^2 y^2 - c \cdot \left((a+c)y^2 + (c-a) \right) = ac(1 - y^2).$$

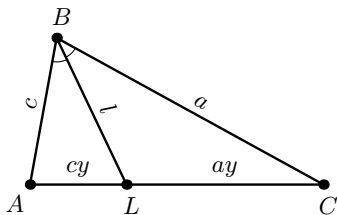


Рис. 4.11. Длина биссектрисы. К постановке задачи

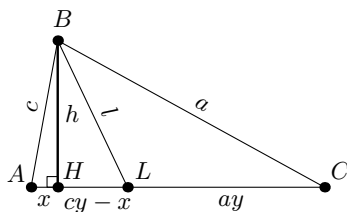


Рис. 4.12. Длина биссектрисы. К решению задачи

§4.3. ПОНЯТИЕ О ВПИСАННЫХ И ОПИСАННЫХ ОКРУЖНОСТЯХ

Используя теорему Пифагора, исследуем некоторые свойства вписанных и описанных окружностей.

4.3.1. Расчет положения центра и радиуса окружности, описанной около равнобедренной трапеции, равнобедренного треугольника, прямоугольного треугольника. Пусть имеется равнобедренная ($AB = CD$) трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = a$ и $BC = b$ и высотой h . Центр окружности O , описанный около трапеции, лежит на общем серединном перпендикуляре KM к основаниям AD и BC (K — середина AD , M — середина BC). Найдем радиус этой окружности (рис. 4.13).

Введем (рис. 4.14) обозначения¹⁾: $OK = x$, $OM = h - x$. По теореме Пифагора для $\triangle AKO$ и для $\triangle BMO$ получим:

$$R^2 = x^2 + (a/2)^2, \quad R^2 = (h - x)^2 + (b/2)^2.$$

¹⁾ Если точка O лежит вне трапеции, x или $h - x$ окажется отрицательным

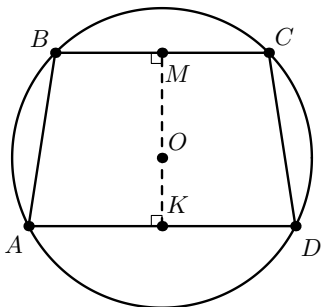


Рис. 4.13. Окружность, описанная около равнобедренной трапеции

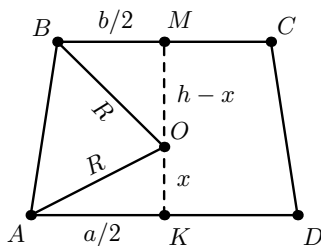


Рис. 4.14. Поиск положения центра описанной окружности

Вычитая полученные соотношения, найдем:

$$h^2 - 2hx + \frac{b^2 - a^2}{4} = 0$$

и ¹⁾

$$x = \frac{h}{2} - \frac{a^2 - b^2}{8h}, \quad R^2 = \frac{a^2}{4} + \left(\frac{h}{2} - \frac{a^2 - b^2}{8h} \right)^2.$$

Для равнобедренного треугольника с основанием a и высотой h (его можно считать предельным случаем равнобедренной трапеции при $b = 0$) формула для радиуса ²⁾ описанной окружности упрощается:

$$R = h - x = \frac{h}{2} + \frac{a^2}{8h}.$$

Найдем положение центра и радиуса окружности, описанной около прямоугольного треугольника.

¹⁾ Читателю предлагается привести ответ для R к видам $(2Rh)^2 = (h^2 + (a+b)^2/4)(h^2 + (a-b)^2/4)$ и $2Rh = AB \cdot BD$.

²⁾ Другой способ получения формулы заключается в использовании теоремы Пифагора $R^2 = (h-R)^2 + (a/2)^2$ для треугольника на рис. 4.15

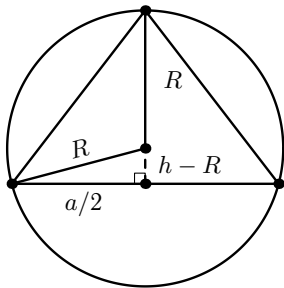


Рис. 4.15. Окружность, описанная около равнобедренного треугольника

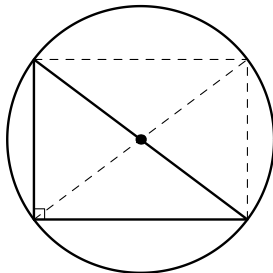


Рис. 4.16. Окружность, описанная около прямоугольного треугольника

Достроим треугольник до прямоугольника (рис. 4.16). Поскольку расстояние от центра прямоугольника до его вершин одинаково, он и является центром описанной окружности как около прямоугольника, так и около треугольника. Таким образом, центр описанной около прямоугольного треугольника окружности лежит на середине гипотенузы, а радиус окружности R равен половине длины гипотенузы c :

$$R = c/2.$$

4.3.2. Касательная к окружности, ее перпендикулярность радиусу. Длина касательной к окружности, равенство двух касательных. Положение центра окружности, вписанной в угол. Пусть B — точка окружности с центром в точке O . Проходящая через точку B прямая называется *касательной* к окружности, если она имеет с окружностью только одну точку B (рис. 4.17).

Покажем, что касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

Поскольку касательная не имеет точек внутри окружности, длина отрезка OB является наикратчайшим расстоянием от точки O до касательной — отрезок OB перпендикулярен касательной.

Длину касательных AB и AC , проведенных из точки A к окружности с центром в точке O радиуса r (рис. 4.18), можно рассчитать по теореме Пифагора:

$$AB = AC = \sqrt{AO^2 - r^2}.$$

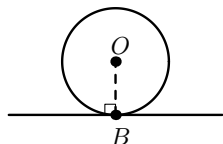


Рис. 4.17. Касательная

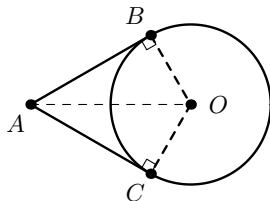


Рис. 4.18. Две касательные

При этом $\triangle AOB = \triangle AOC$ и AO — биссектриса $\angle BAC$. Следовательно, центр окружности, вписанной в угол $\angle BAC$, лежит на биссектрисе угла.

4.3.3. Задача об окружности, вписанной в равнобедренный треугольник. Говорят, что окружность *вписана* в треугольник, если она касается всех его сторон. Поскольку эта окружность вписана во все углы треугольника, ее центр находится в точке пересечения биссектрис треугольника.

Найдем положение центра O окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием $BC = a$, боковыми сторонами $AB = AC = c$ и высотой (совпадающей с биссектрисой и медианой) $AH = h = \sqrt{c^2 - (a/2)^2}$ (рис. 4.19).

Поскольку BO — биссектриса $\triangle ABH$, имеем:

$$OH = y \cdot HB = ay/2, \quad OA = y \cdot AB = cy.$$

Учтем, что

$$h = \frac{ay}{2} + cy = \left(\frac{a}{2} + c\right)y \iff y = \frac{h}{a/2 + c};$$

тогда

$$r = OH = ay/2 = \frac{ah}{a + 2c}.$$

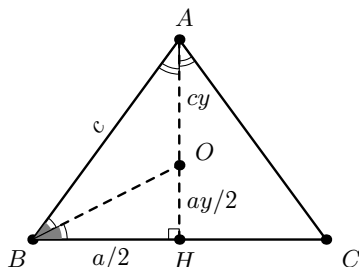


Рис. 4.19. Поиск центра окружности, вписанной в равнобедренный треугольник

4.3.4. Отрезки, на которые вписанная окружность разбивает стороны треугольника. Пусть длины сторон треугольника заданы: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Найдём отрезки, на которые вписанная окружность разбивает стороны треугольника.

Пусть сторона AB разбивается точкой касания окружности на отрезки x и y , сторона BC — на отрезки y и z , сторона AC — на отрезки x и z (рис. 4.20). Тогда

$$x + y = c, \quad y + z = a, \quad x + z = b.$$

Складывая соотношения и используя обозначение для полупериметра $p = (a + b + c)/2$, получим:

$$2x + 2y + 2z = a + b + c = 2p.$$

Тогда $x + y + z = p$ и

$$z = p - c, \quad x = p - a, \quad y = p - b.$$

Полученный ответ представлен на рис. 4.21.

4.3.5. Задача об окружности, вписанной в прямоугольный треугольник. Используя полученный результат, рассчитаем радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $AB = c$ и катетами $AC = b$ и $BC = a$ (рис. 4.22).

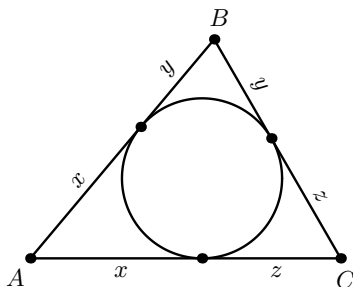


Рис. 4.20. К решению задачи о вписанной окружности

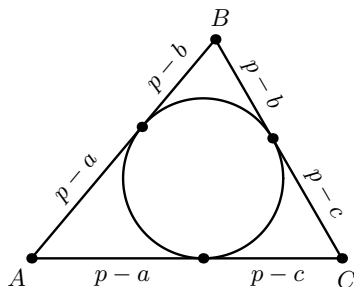


Рис. 4.21. Ответ к задаче о вписанной окружности

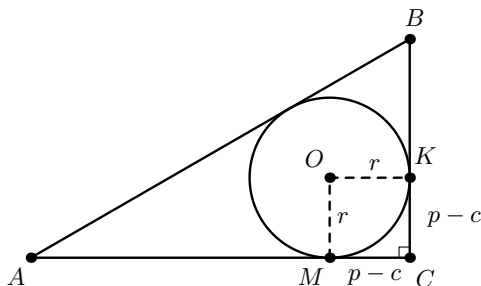


Рис. 4.22. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник

Поскольку $OM \parallel KC$ как перпендикуляры к стороне AC , а $OK \parallel MC$ как перпендикуляры к стороне BC , $CKOM$ — параллелограмм (квадрат) и

$$r = p - c = \frac{a + b - c}{2}.$$

4.3.6. Свойство описанного четырехугольника. Из равенства двух касательных к окружности вытекает свойство четырехугольника, описанного около окружности: суммы противоположных сторон такого четырехугольника равны.

Для доказательства (рис. 4.23) обозначим равные отрезки одинаковыми буквами x, y, z, t ; тогда

$$AD + BC = AB + CD = x + y + z + t.$$

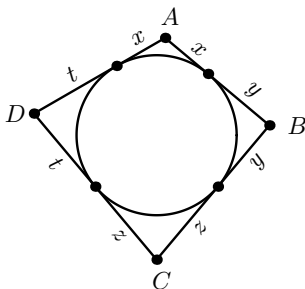


Рис. 4.23. Описанный четырехугольник

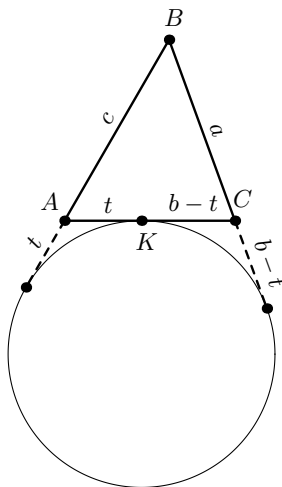


Рис. 4.24. К решению задачи о вневписанной окружности

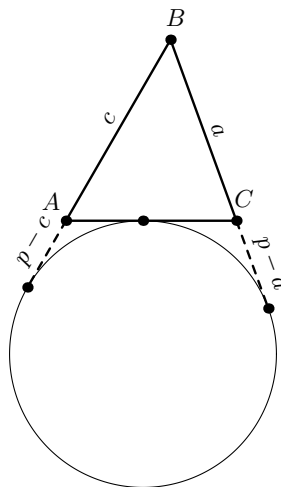


Рис. 4.25. Ответ к задаче о вневписанной окружности

4.3.7. Понятие о вневписанной окружности треугольника. Отрезки, на которые вневписанная окружность разбивает стороны треугольника. В задачах, помимо вписанных, встречаются также и вневписанные окружности треугольников. *Вневписанная* окружность треугольника касается одной его стороны и продолжений двух других сторон (рис. 4.24).

Пусть длины сторон треугольника заданы: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Рассмотрим вневписанную окружность, которая касается стороны $AC = b$ и делит ее на отрезки $AK = t$, $KC = b - t$. Найдем эти отрезки.

Учтем, что касательные, проведенные из одной точки, имеют одинаковые длины. Запишем свойство равенства касательных, выходящих из точки B : $c + t = a + b - t$. Из него получим: $2t = a + b - c = 2p - 2c$ и

$$AK = t = p - c, \quad KC = b - t = p - a.$$

Полученные ответы представлены на рисунке 4.25.

