Глава 2

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

§2.1. Дифференциальное исчисление. Метод Ферма исследования функций

2.1.1. Как заменить криволинейный график функции прямой линией? Понятие производной. Встречающиеся в математике и физике функции зачастую имеют сложный вид. Однако, если рассматривать *малые* изменения переменных, функцию можно *приближенно* считать линейной.

Построим график функции $y = y(x)$ и проведем через две близкие точки этого графика $(x_0; y_0 = y(x_0))$ и $(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y = y(x_0 + \Delta x))$ секущую (рис. 2.1). Видно, что вблизи точки $(x_0; y_0)$ изначально сложный график практически неотличим от прямой линии — при удалении

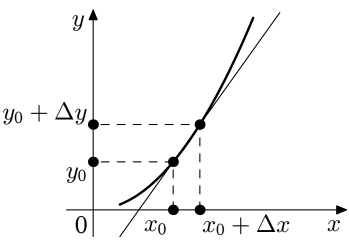

Рис. 2.1. Секущая, проходящая через две близкие точки графика

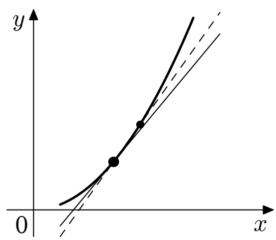

Рис. 2.2. Касательная к графику (сплошная линия) и секущая (пунктир)

от этой точки отличие возрастает. Отметим также, что при малых Δx секущая к графику практически неотличима от касательной (рис. 2.2).

Таким образом, важной характеристикой функции является угловой коэффициент k касательной, проведенной к графику функции при $x = x_0$. Этот угловой коэффициент называют *производной* функции $y = y(x)$ при $x = x_0$ и обозначают как $y'(x_0)$. Он приближенно совпадает с угловым коэффициентом секущей

$$y'(x_0) = k \simeq \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}, \qquad \Delta x \text{ мало.}$$

Малые приращения [1] величин Δx и $\Delta y \equiv y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$ называют их *дифференциалами*, а совокупность правил работы с ними — *дифференциальным исчислением.*

2.1.2. Дифференцирование константы, суммы величин, произведения величины на константу. Если функция $y(x)$ является константой $y(x) = c$ (например: $y = 0$, $y = 1$, $y = 13$, ...), ее изменение равно нулю:

$$\Delta c = 0, \qquad \text{если } c \text{ — константа.}$$

В частности, $\Delta(1) = 0$, $\Delta(13) = 0$ и т.д.

Пусть $S = y + z$ — сумма двух величин $y(x)$ и $z(x)$, зависящих от переменной x. Если при изменении x на Δx величина y изменяется на Δy, а z — на Δz, сумма величин изменится на $\Delta S = \Delta y + \Delta z$. Поэтому

$$\Delta(y + z) = \Delta y + \Delta z.$$

Пусть величина S в n раз (n — константа) больше величины y. Тогда при изменении y на Δy величина S изменится на $\Delta S = n\Delta y$:

$$\Delta(ny) = n\Delta y, \qquad \text{если } n \text{ — константа.}$$

---

[1] Для малых приращений Лейбниц использовал обозначения dx и dy вместо Δx и Δy

2.1.3. Дифференцирование произведения. Несколько более сложным является вопрос о приращении произведения $S = yz$ величин $y = y(x)$ и $z = z(x)$.

Пусть величина x изменилась на Δx, и в результате этого y изменилась на Δy, z изменилась на Δz. Поскольку величина S является площадью прямоугольника со сторонами y и z, ее приращение $\Delta S = \Delta(yz)$ равно площади фигуры (рис. 2.3), состоящей из прямоугольников с площадями $y\Delta z$, $z\Delta y$ и $\Delta y \cdot \Delta z$. Пренебрегая площадью самого маленького прямоугольника $\Delta y \cdot \Delta z$, получим:

$$\Delta(yz) = y \cdot \Delta z + z \cdot \Delta y. \tag{2.1}$$

2.1.4. Дифференцирование выражений x^2, $\sqrt{x}$, x^3 и $1/x$. Общая формула для дифференцирования x^n. Используя соотношение (2.1) для дифференцирования произведения, получим правило дифференцирования x^n при некоторых n.

Считая в (2.1) $y = z = x$, получим:

$$\Delta(x^2) = 2x \cdot \Delta x.$$

Аналогичное соотношение можно записать и для квадрата величины t: $\Delta(t^2) = 2t\Delta t$. Обозначая $t = \sqrt{x}$, получим:

$$\Delta x = 2\sqrt{x}\,\Delta(\sqrt{x}) \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta(\sqrt{x}) = \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}.$$

Полагая в соотношении (2.1) $y = x^2$, $z = x$, найдем:

$$\Delta(x^2 \cdot x) = x^2\Delta x + x\Delta(x^2) = x^2\Delta x + x \cdot 2x\Delta x = 3x^2\Delta x.$$

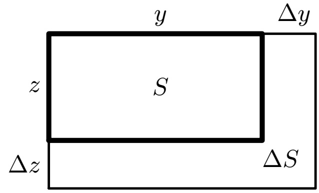

Рис. 2.3. Дифференцирование произведения

При $y = 1/x$ и $z = x$ имеем:

$$0 = \Delta(1) = \Delta(x^{-1} \cdot x) = x^{-1}\Delta x + x\Delta(x^{-1})$$

и

$$\Delta(x^{-1}) = -x^{-2}\Delta x.$$

Полученные соотношения являются частным случаем общей формулы:

$$\Delta(x^n) = nx^{n-1}\Delta x. \tag{2.2}$$

Ее доказательство мы дадим при изучении свойств натуральных логарифмов.

2.1.5. Дифференцирование тригонометрических функций. Получим правила дифференцирования тригонометрических функций $x(\alpha) = \cos\alpha$ и $y(\alpha) = \sin\alpha$.

Построим угол α; величины $x(\alpha)$ и $y(\alpha)$ изобразим графически в виде точки на координатной плоскости с координатами $(x; y)$ (рис. 2.4). При увеличении α на $\Delta\alpha$ построенная точка смещается по окружности на расстояние $\Delta\alpha$ — в направлении под углом α к оси y (рис. 2.5). Отсюда

$$\Delta x = -\Delta\alpha \cdot \sin\alpha, \qquad \Delta y = \Delta\alpha \cdot \cos\alpha.$$

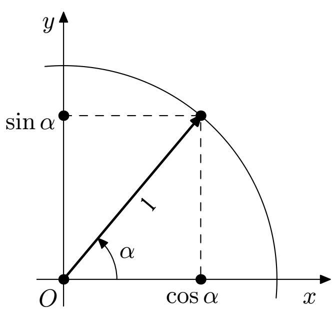

Рис. 2.4. Изображение синуса и косинуса

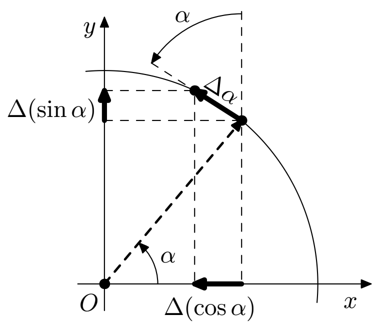

Рис. 2.5. Приращения синуса и косинуса

Приходим к следующему правилу дифференцирования тригонометрических выражений:

$$\Delta(\cos\alpha) = -\Delta\alpha \cdot \sin\alpha, \qquad \Delta(\sin\alpha) = \Delta\alpha \cdot \cos\alpha.$$

2.1.6. Метод Ферма исследования функций на возрастание и убывание. Один из наиболее эффективных способов исследования функций на возрастание и убывание и доказательства неравенств был предложен Ферма. Метод анализа функции $y = y(x)$ заключается в расчете ее производной $\Delta y/\Delta x$. Если она положительна (касательная к графику имеет положительный угловой коэффициент), функция вблизи рассмотренной точки возрастает, если отрицательна — убывает. Так находятся промежутки возрастания и убывания функции. При $\Delta y/\Delta x = 0$ (горизонтальная касательная) функция может достигать максимума или минимума.

§2.2. Понятие об интеграле. Формула Ньютона-Лейбница

2.2.1. Понятие об интеграле. Интеграл от константы и ступенчатой функции. Рассмотрим фигуру, ограниченную графиком положительной функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$ (рис. 2.6). Для площади S этой

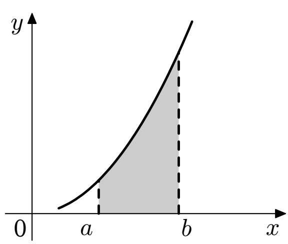

Рис. 2.6. Интеграл как площадь под графиком функции $y = f(x)$

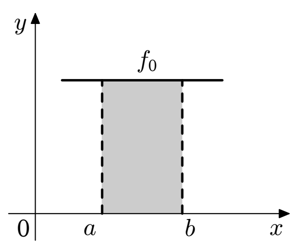

Рис. 2.7. Интеграл от константы

фигуры принято[1] специальное наименование — *интеграл* от функции $f(x)$ по промежутку от a до b. Лейбниц предложил использовать для интеграла обозначение:

$$S \equiv \int_a^b f(x)\,dx. \tag{2.3}$$

В качестве примера рассчитаем интеграл от функции $f(x)$, которая всюду равна константе f_0 (рис. 2.7).

Фигура, ограниченная графиком функции и тремя прямыми, является прямоугольником со сторонами $b-a$ и f_0 — его площадь

$$\int_a^b f_0\,dx = f_0(b-a).$$

Более сложным примером является ступенчатая функция, равная f_1 на участке от x_1 до x_2, f_2 — на участке от x_2 до x_3 и т.д. (рис. 2.8).

Площадь под графиком функции будет складываться из площадей отдельных прямоугольников:

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x)\,dx = f_1(x_2-x_1)+f_2(x_3-x_2)+\ldots+f_{n-1}(x_n-x_{n-1}).$$

Полученное выражение проясняет смысл обозначения (2.3): знак $\int$ является вытянутой буквой S, обозначающей сумму; выражение $f(x)\,dx$ является произведением значения f_k функции на k-й ступеньке и приращения $x_{k+1}-x_k$

[1] при $f<0$ площадь считается отрицательной

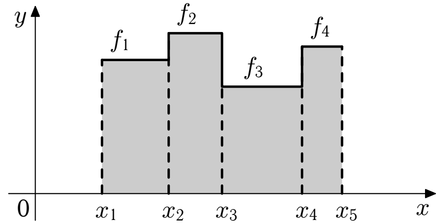

Рис. 2.8. Интеграл от ступенчатой функции

переменной x на ступеньке. Используется обозначение именно для малого приращения dx, так как график реалистичной функции $f(x)$ можно заменить ступеньками, только сделав ступеньки очень малыми (неразличимыми на глаз).

2.2.2. Интеграл от суммы функций, произведения функции на число. Покажем, что при сложении функций $f(x)$ и $g(x)$ их интегралы складываются:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Поскольку график любой функции можно представить как набор большого числа очень маленьких горизонтальных ступенек, достаточно проверить свойство для ступенчатых функций, а значит — для констант $f(x)=f_0$, $g(x)=g_0$.

Интеграл от суммы функций $h(x)=f_0+g_0$ равен

$$\int_a^b h(x)\,dx = (f_0+g_0)(b-a).$$

Он совпадает с суммой интегралов от функций $f(x)=f_0$ и $g(x)=g_0$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f_0(b-a), \qquad \int_a^b g(x)\,dx = g_0(b-a).$$

Покажем, что при увеличении функции f в n раз интеграл от нее также увеличивается в n раз:

$$\int_a^b nf(x)\,dx = n\int_a^b f(x)\,dx.$$

Заметим, что это свойство также достаточно проверить для случая $f(x)=f_0=\mathrm{const}$.

Интеграл от увеличенной в n раз функции $S(x)=nf_0$ равен

$$\int_a^b S(x)\,dx = nf_0(b-a).$$

Это в n раз больше интеграла от функции $f(x)=f_0$, равного $f_0(b-a)$.

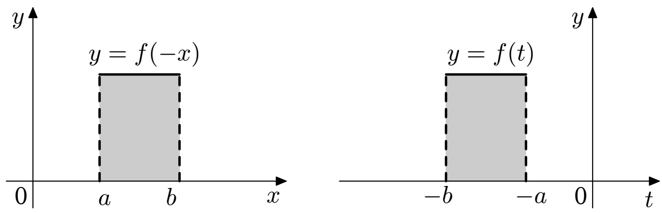

Рис. 2.9. Отражение относительно вертикальной оси

2.2.3. Замена переменной в интеграле и операции над графиком функции (отражение, сдвиг, растяжение по горизонтали). Над графиком функции $f(x)$ можно проводить различные преобразования:

- отражение относительно вертикальной оси;
- сдвиг вдоль горизонтальной оси на расстояние c;
- растяжение вдоль горизонтальной оси в k раз.

Исследуем поведение интегралов при таких преобразованиях. Поскольку всякая функция рассматривается как состоящая из большого числа горизонтальных ступенек, ограничимся случаем, когда функция на промежутке интегрирования равна константе.

При отражении относительно вертикальной оси (рис. 2.9) график функции $y = f(-x)$ при $a < x < b$ переходит в график функции $y = f(t)$ при $-b < t < -a$, а площадь под графиком остается неизменной:

$$\int_a^b f(-x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(t)\,dt.$$

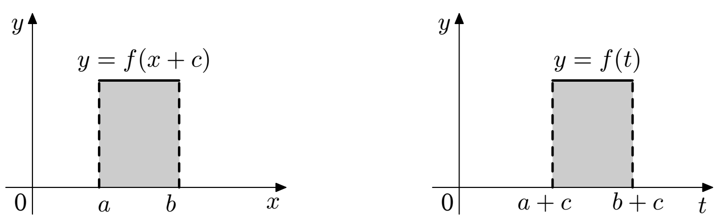

Рис. 2.10. Сдвиг на c по горизонтали

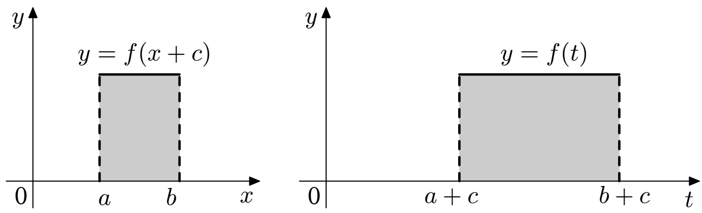

Рис. 2.11. Растяжение по горизонтали в k раз

При сдвиге вдоль горизонтальной оси на расстояние c (рис. 2.10) график функции $y = f(x+c)$ при $a < x < b$ переходит в график функции $y = f(t)$ при $a + c < t < b + c$. Площадь под графиком также не меняется:

$$\int_a^b f(x + \mathrm{c})\, dx = \int_{a+c}^{b+c} f(t)\, dt. \tag{2.4}$$

При растяжении вокруг горизонтальной оси в k раз график функции $y = f(kx)$ при $a < x < b$ переходит в график функции $y = f(t)$ при $ka < t < kb$, а площадь под графиком увеличивается в k раз:

$$\int_a^b f(kx)\, dx = \frac{1}{k} \int_{ka}^{kb} f(t)\, dt. \tag{2.5}$$

Соотношения (2.4) и (2.5) можно объединить в одно:

$$\int_a^b f(kx + c)\, dx = \frac{1}{k} \int_{ka+c}^{kb+c} f(t)\, dt. \tag{2.6}$$

2.2.4. Изменение функции и интеграл от ее производной. Формула Ньютона-Лейбница, ее применение к расчету интегралов. Пусть функция $f(x)$ является производной от $F(x)$:

$$f(x) = \frac{\Delta F}{\Delta x} = F'(x).$$

Оказывается, что площадь под графиком функции $f(x)$ связана с изменением функции $F(x)$ при возрастании x от a до b.

Проверим это утверждение для линейной функции $F(x) = kx + l$, с постоянной производной $f(x) = k$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = k(b-a), \qquad F(b) - F(a) = k(b-a).$$

Следовательно, для данного случая

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{2.7}$$

Теперь представим, что график функции $F(x)$ состоит из очень большого числа прямолинейных участков. На каждом участке соотношение (2.7) выполнено — оно выполняется и при объединении участков.

Тождество (2.7) называется *формулой Ньютона-Лейбница*. Оно позволяет рассчитывать интеграл от функции $f(x)$ по следующему методу:

- *подбираем* функцию $F(x)$, производная от которой равна $f(x)$: $\Delta F/\Delta x = f(x)$;
- пользуемся формулой Ньютона-Лейбница (2.7).

Основная трудность в расчете интегралов методом Ньютона-Лейбница заключается именно в подборе функции $F(x)$: важно заранее, до расчета интеграла, иметь в наличии достаточно большую таблицу производных, чтобы из нее выбрать нужную функцию $F(x)$.

2.2.5. Замена переменной в интеграле с точки зрения формулы Ньютона-Лейбница. Покажем, как можно получить часто используемую при решении задач формулу (2.6), ранее проверенную геометрическими методами, с помощью тождества Ньютона-Лейбница.

Пусть $F(t)$ — функция, производная которой равна

$$\frac{\Delta F}{\Delta t} = f(t);$$

для нее

$$\int_{ka+c}^{kb+c} f(t)\,dt = F(kb+c) - F(ka+c).$$

Рассмотрим функцию $G(x) = F(kx+c) = F(t)$, полученную из $F(t)$ заменой $t = kx + c$. Найдем еее производную:

$$\Delta G = \frac{\Delta F}{\Delta t} \cdot \Delta t = f(t) k \Delta x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\Delta G}{\Delta x} = kf(kx + c).$$

По формуле Ньютона-Лейбница,

$$\int_a^b kf(kx + c)\, dx = G(b) - G(a) = F(kb + c) - F(ka + c).$$

Приходим к соотношению (2.6).

2.2.6. Табличные интегралы (интегралы от степенной и тригонометрической функции). Используя метод Ньютона-Лейбница, составим таблицу некоторых важных интегралов.

Начнем с интеграла степенной функции:

$$\int_a^b x^n\, dx.$$

Подберем функцию $F(x)$, с производной x^n. Предположим, что функция $F(x)$ является степенной:

$$F(x) = Ax^k, \qquad A,\ k\ \text{— константы.}$$

Тогда, согласно (2.2),

$$\Delta F = A \cdot kx^{k-1} \Delta x, \qquad \frac{\Delta F}{\Delta x} = Akx^{k-1}.$$

Видно, что $\Delta F/\Delta x = x^n$ при $k = n + 1$ и $A = 1/k = 1/(n + 1)$. Таким образом, функция, производная которой равна x^n, подобрана:

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Rightarrow \frac{\Delta F}{\Delta x} = x^n.$$

По формуле Ньютона-Лейбница получим:

$$\int_a^b x^n\, dx = F(b) - F(a) = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}. \tag{2.8}$$

Формула (2.8) применима при всех n, кроме $n = -1$. Случай $n = -1$ будет рассмотрен в дальнейшем.

Рассчитаем интегралы от тригонометрических функций
$$\int_a^b \sin x\,dx, \qquad \int_a^b \cos x\,dx.$$

Поскольку производная функции $F(x) = \sin x$ равна $\Delta F/\Delta x = \cos x$, по формуле Ньютона-Лейбница получим:

$$\int_a^b \cos x\,dx = F(b) - F(a) = \sin b - \sin a.$$

Аналогично, производная функции $G(x) = -\cos x$ равна $\Delta G/\Delta x = \sin x$; тогда
$$\int_a^b \sin x\,dx = G(b) - G(a) = \cos a - \cos b.$$

§2.3. Натуральный логарифм и экспонента

2.3.1. Натуральный логарифм как площадь под гиперболой. Интеграл от $1/x$ по произвольному промежутку. Производная натурального логарифма. При вычислении интеграла от степенной функции мы обнаружили, что интеграл $\int_a^b x^{-1}\,dx$ не может быть выражен через степенные функции переменных a и b. В случае, если какой-либо интеграл не выражается через известные ранее функции, для него обычно вводят *новое* обозначение.

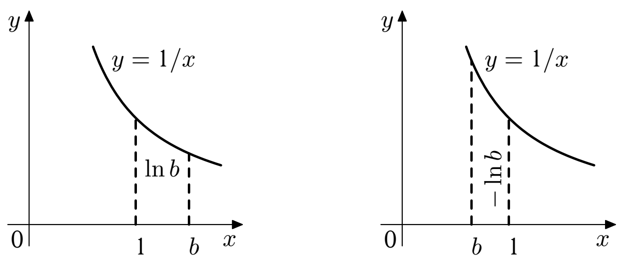

Рис. 2.12. Определение $\ln b$ через площадь под графиком

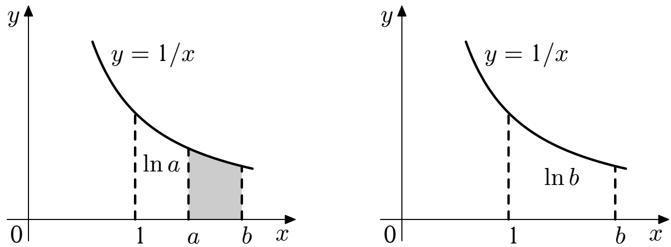

Рис. 2.13. К расчету интеграла от x^{-1} по промежутку от a до b

Для интеграла $\int_1^b x^{-1}\,dx$, равного площади фигуры (рис. 2.12), ограниченной гиперболой $y = 1/x$, осью абсцисс и вертикальными прямыми $x = 1$ и $x = b$, принимается обозначение $\ln b$ (*натуральный логарифм* b):

$$\ln b = \int_1^b \frac{1}{x}\,dx, \qquad b \geqslant 1.$$

При $0 < b < 1$ площадь считается с обратным знаком:

$$\ln b = -\int_b^1 \frac{1}{x}\,dx, \qquad b < 1,$$

а натуральный логарифм единицы равен нулю: $\ln 1 = 0$.

Интеграл от функции $y = 1/x$ по промежутку от a до b в сумме с $\ln a$ должен давать $\ln b$ (рис. 2.13). Отсюда

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln b - \ln a. \tag{2.9}$$

Используя свойство (2.9), получим правило дифференцирования натурального логарифма.

Как вытекает из соотношения (2.9), приращение натурального логарифма совпадает с площадью фигуры под графиком $y = 1/x$ (рис. 2.14):

$$\Delta(\ln a) = \ln(a + \Delta a) - \ln a = \int_a^{a+\Delta a} x^{-1}\,dx.$$

При малых Δa эта фигура приближенно совпадает с прямоугольником со сторонами $1/a$ и Δa и имеет

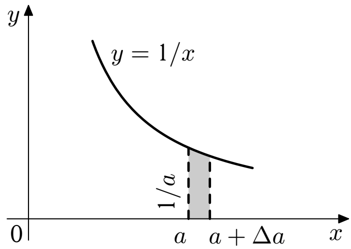

Рис. 2.14. Приращение натурального логарифма как площадь

площадь $a^{-1}\Delta a$:

$$\Delta(\ln a) = \frac{1}{a}\Delta a. \tag{2.10}$$

2.3.2. Масштабирование площади под гиперболой. Натуральный логарифм произведения и степени. Значения, принимаемые натуральным логарифмом. Растягивая площадь под гиперболой в k раз по горизонтали и сжимая в такое же количество раз по вертикали, получим важное свойство натурального логарифма.

Рассмотрим фигуру с площадью $\ln b$, ограниченную гиперболой $y = 1/x$, осью x и вертикальными прямыми $x = 1$ и $x = b$. Растянем эту фигуру в k раз по горизонтали и сожмем в k раз по вертикали (рис. 2.15). Получим фигуру, ограниченную этой же гиперболой, осью x и вертикальными прямыми $x = k$ и $x = kb$. Площадь этой фигуры согласно соотношению (2.9) составляет $\ln(kb) - \ln k$.

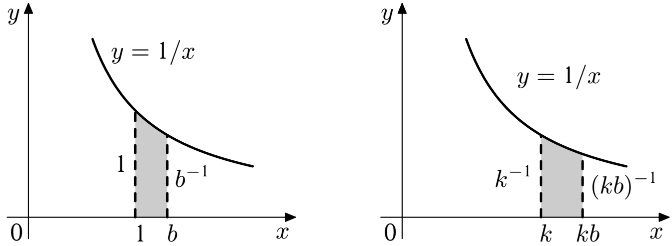

Рис. 2.15. К выводу свойства логарифма произведения

Поскольку при растяжении по горизонтали площади увеличиваются в k раз, а при сжатии по вертикали — уменьшаются в k раз, в результате рассмотренного преобразования площадь измениться не должна, и

$$\ln b = \ln(kb) - \ln k. \tag{2.11}$$

Таким образом, натуральный логарифм произведения чисел равен сумме натуральных логарифмов:

$$\ln(kb) = \ln k + \ln b. \tag{2.12}$$

Применяя данное тождество для произведения n одинаковых чисел, находим:

$$\ln b^n = n \ln b. \tag{2.13}$$

Покажем, что натуральный логарифм может принимать любые значения, от $-\infty$ до $+\infty$.

Считая в (2.13) n достаточно большим, получаем, что $\ln a$ при $a = b^n$ может принимать значения, сколь угодно близкие к $+\infty$. Поскольку $\ln a + \ln(1/a) = \ln 1 = 0$, $\ln(1/a)$ в этом случае принимает значения, сколь угодно близкие к $-\infty$.

2.3.3. Определение экспоненты. Экспонента нуля. Логарифм экспоненты и экспонента логарифма. Произведение экспонент, степень экспоненты. Число e как основание натуральных логарифмов. Пусть $S = \ln b$. Тогда говорят, что число b является *экспонентой* числа S:

$$S = \ln b \iff b = \exp S. \tag{2.14}$$

Поскольку логарифм может принимать любые значения, экспоненту можно брать от любого числа S. Геометрический смысл экспоненты представлен на рис. 2.16: площадь фигуры, ограниченной гиперболой $y = 1/x$, осью x, прямыми $x = 1$ и $x = \exp S$ равна S.

Учитывая, что $\ln 1 = 0$, получим $\exp 0 = 1$.

Как вытекает из свойства (2.14), натуральный логарифм экспоненты числа S равен самому этому числу, а экспоненты от натурального логарифма положительного числа b

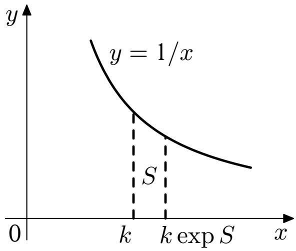

Рис. 2.16. Экспонента на графике

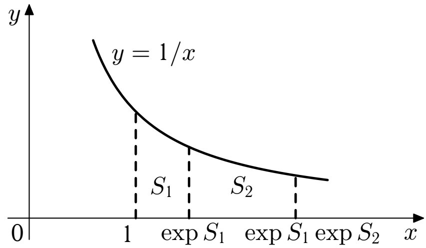

Рис. 2.17. Произведение экспонент

равна b:

$$\ln \exp S = S, \qquad \exp(\ln b) = b, \quad b > 0.$$

Основное свойство экспоненты заключается в том, что при сложении двух чисел их экспоненты перемножаются (рис. 2.17).

Рассмотрим натуральный логарифм произведения экспонент:

$$\ln(\exp S_1 \exp S_2) = \ln \exp S_1 + \ln \exp S_2 = S_1 + S_2.$$

Отсюда

$$\exp S_1 \exp S_2 = \exp(S_1 + S_2).$$

Перемножая n экспонент, приходим к формуле для возведения экспоненты в натуральную степень n:

$$(\exp S)^n = \exp(nS). \tag{2.15}$$

Покажем, что формула (2.15) справедлива и при отрицательных [1] и дробных n.

Из соотношения (2.3.3) вытекает, что $\exp S \exp(-S) = = \exp 0 = 1$ и $\exp(-S) = 1/\exp(S)$. Поэтому

$$\exp(-nS) = 1/\exp(nS) = 1/(\exp S)^n = (\exp S)^{-n}.$$

[1] при $n = 0$ формула (2.15) переходит в уже проверенное соотношение $\exp 0 = 1$

Таким образом, соотношение (2.15) можно использовать и при отрицательном n.

Полагая в (2.15) $S = W/n$, получим:

$$\exp(W/n) = \sqrt[n]{\exp W}\,.$$

Следовательно, при целом m и натуральном n

$$\exp(mS/n) = \sqrt[n]{\exp(mS)} = \sqrt[n]{(\exp(S))^m} = (\exp(S))^{m/n}.$$

Свойство (2.15) проверено при всех рациональных показателях степени.

Вводя обозначение для экспоненты единицы

$$e = \exp 1,$$

можно представить экспоненту как показательную функцию:

$$\exp x = \exp(x \cdot 1) = (\exp 1)^x = e^x.$$

Таким образом, натуральный логарифм $\ln b$ оказывается степенью, в которую надо возвести число e для получения b:

$$e^{\ln b} = \exp(\ln b) = b,$$

поэтому

$$\ln b = \log_e b.$$

2.3.4. Дифференцирование экспоненты и степенной функции. Получим формулу для малого приращения экспоненты.

Воспользуемся соотношением (2.10) для приращения натурального логарифма. Полагая в нем $a = e^S$ и используя свойство $\ln e^S = S$, запишем его как:

$$\Delta \ln e^S = \Delta(e^S)/e^S \iff \Delta(e^S) = e^S \Delta S. \tag{2.16}$$

Дадим обоснование формуле (2.2) для дифференцирования степени.

Пусть $y = x^n$. Считая x и y положительными, возьмем логарифм от левой и правой частей: $\ln y = n \ln x$. Тогда $\Delta \ln y = n \Delta \ln x$. Поскольку, согласно (2.10), $\Delta \ln y = \Delta y/y$, а $\Delta \ln x = \Delta x/x$, получим:

$$\frac{\Delta y}{y} = n\frac{\Delta x}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta y = nx^{n-1}\Delta x.$$

Свойство (2.2) при положительном x проверено.

Случай отрицательного $x = -a$ (и натурального n) сводится к рассмотренному:

$$\Delta(-a)^n = (-1)^n\Delta(a^n) = (-1)^n na^{n-1}\Delta a = n(-a)^{n-1}\Delta(-a).$$

2.3.5. Неравенство для e^S и $1+S$. Приближенный расчет экспоненты и числа e. Для приближенных вычислений можно использовать неравенства для экспоненты.

Неравенства графически показаны на рис. 2.18. Из рисунка слева вытекает, что площадь S меньше площади пунктирного прямоугольника со сторонами $e^S - 1$ и 1, а из рисунка справа — что площадь W больше площади пунктирного прямоугольника со сторонами $1 - e^{-W}$ и 1. Поэтому

$$e^S - 1 > S, \qquad 1 - e^{-W} < W.$$

Эти два неравенства можно записать в виде одной формулы, справедливой как при положительных, так и при отрицательных S:

$$e^S > 1 + S, \qquad S > 0 \text{ или } S < 0. \tag{2.17}$$

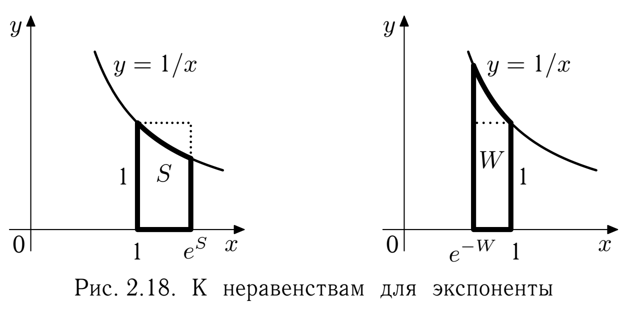

Рис. 2.18. К неравенствам для экспоненты

Отметим, что при *малых* S погрешность формулы (2.17) мала, поэтому можно использовать приближенное соотношение $e^S \simeq 1 + S$ — при больших S погрешность увеличивается. Чтобы приближенно рассчитать e^S при больших S, можно воспользоваться соотношением:

$$e^S = (e^{S/n})^n \simeq (1 + S/n)^n, \qquad n \text{ велико.} \tag{2.18}$$

Рассчитаем данным методом приближения для числа e.

С одной стороны,

$$e = (e^{1/n})^n > (1 + 1/n)^n\,;$$

с другой стороны,

$$\frac{1}{e} = (e^{-1/(k+1)})^{k+1} > \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} = \frac{1}{(1 + 1/k)^{k+1}}$$

и

$$e < (1 + 1/k)^{k+1}\,.$$

Таким образом, получено неравенство [1]

$$(1 + 1/n)^n < e < (1 + 1/n)^{n+1}\,.$$

При достаточно большом n отношение правой и левой части данного неравенства близко к единице — погрешность становится сколь угодно малой.

§2.4. Комплексные числа

2.4.1. Комплексные числа, их действительная и мнимая части. Уже при решении квадратных уравнений выяснилось, что некоторые из них (например $x^2 = -1$) решений не имеют. Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$, имеющий корни x_1 и x_2, можно разложить на множители $a(x - x_1)(x - x_2)$ — при отсутствии корней такое разложение невозможно. Чтобы такое разложение можно было записать все-

[1] Читателю предлагается самостоятельно рассчитать левую и правую части неравенства при $n = 4, 8, 16, 32, \ldots, 1024$, используя микрокалькулятор

гда, в математике ввели *мнимую единицу* i — воображаемое число, квадрат которого равен -1:

$$i^2 = -1 \tag{2.19}$$

Выражение вида $z = x + iy$ (x и y — действительные числа) стали называть *комплексным числом* с действительной частью $x = \mathrm{Re} z$ и мнимой частью $y = \mathrm{Im} z$ [1]).

2.4.2. Сложение и умножение комплексных чисел. Комплексное сопряжение. Обращение комплексного числа. Складывать и умножать комплексные числа можно с помощью обычных правил раскрытия скобок, используя при необходимости соотношение (2.19) [2]). Как и действительные числа, комплексные числа удовлетворяют переместительному, сочетательному и распределительному законам [3]) сложения и умножения.

Еще одна операция — *комплексное сопряжение* (обозначается звездочкой) — заключается в замене i на $-i$: $(x + iy)^* = x - iy$. Эту операцию используют для деления комплексных чисел:

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x-iy)(x+iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}.$$

2.4.3. Изображение комплексного числа на координатной плоскости. Сложение комплексных чисел и сложение векторов. Тригонометрическая запись комплексного числа, его модуль и аргумент. Комплексное число $z = x + iy$ изображают на координатной плоскости в виде вектора, соединяющего начало координат с точкой с координатой $(x; y)$ (рис. 2.19). Поскольку при сложении комплексных чисел их действительные и мнимые части складываются, векторы, изображающие комплексные числа, также складываются.

---

1) Примерами комплексных чисел являются $3 + 4i$, $2 + 3i$ и т.д.

2) Пример: $(2 + 3i)(3 + 4i) = 6 + 14i + 12i^2 = 14i - 6$.

3) Читателю рекомендуется проверить эти свойства прямым вычислением

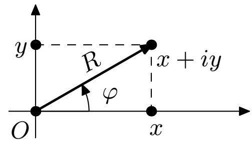

Рис. 2.19. Комплексное число на координатной плоскости

Положение точки A на плоскости с началом координат O можно также описать, задавая вместо декартовых координат точки $(x; y)$ расстояние до начала координат $OA = R$ и угол φ между осью x и вектором $\overrightarrow{OA}$. Учитывая, что

$$x = R\cos\varphi, \qquad y = R\sin\varphi,$$

получим *тригонометрическую* запись z:

$$z = x + iy = R(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{2.20}$$

Параметр $R = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем* комплексного числа z, параметр φ — аргументом комплескного числа z.

2.4.4. Функция Эйлера. Геометрический смысл умножения комплексного числа на функцию Эйлера (поворот вектора). Одно из применений комплексных чисел к тригонометрии заключается в использовании свойств функции Эйлера [1]

$$E(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Исследуем геометрический смысл умножения на эту функцию.

Умножим выражение $E(\varphi)$ на числа a и ib:

$$aE(\varphi) = a\cos\varphi + ia\sin\varphi, \qquad ibE(\varphi) = -b\sin\varphi + ia\cos\varphi.$$

Изобразим эти произведения на рис. 2.20. Видно, что в обоих случаях при умножении на $E(\varphi)$ вектор, изображающий комплексное число, поворачивается на угол φ против часовой стрелки.

[1] Обозначение $E(\varphi)$ не является общепринятым

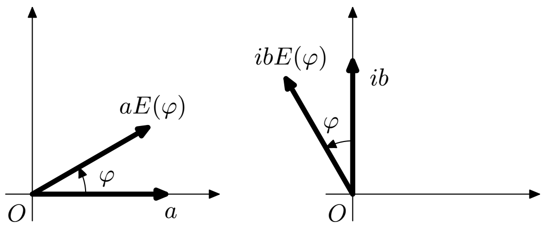

Рис. 2.20. Умножение чисел a (слева) и ib (справа) на функцию Эйлера $E(\varphi)$

Вектор, изображающий комплексное число $a + ib$, складывается из векторов, отображающих числа a и ib. Поскольку при умножении на $E(\varphi)$ каждое из слагаемых поворачивается на угол φ, сумма векторов тоже повернется на этот же угол.

Таким образом, умножить $E(\varphi)$ на комплексное число — значит повернуть вектор, изображающий это число, на угол φ против часовой стрелки.

2.4.5. Свойства функции Эйлера при сложении аргументов — краткая запись тригонометрических формул сложения. Поскольку умножение на $E(\alpha)$ геометрически изображается как поворот на угол α, умножение на $E(\beta)$ — как поворот на β, умножение на $E(\alpha)E(\beta)$ изображается как поворот на угол $\alpha+\beta$ — это умножение на $E(\alpha+\beta)$. Приходим к соотношению

$$E(\alpha+\beta) = E(\alpha)E(\beta), \tag{2.21}$$

которое является краткой записью тригонометрических формул сложения. Подробно тождество (2.21) записывается так:

$$\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta),$$

или после раскрытия скобок

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

2.4.6. Приближенный расчет значений синуса и косинуса с помощью комплексных чисел. Понятие об экспоненте мнимого числа. Используя свойства функции Эйлера, можно приближенно рассчитывать значения тригонометрических функций $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Для этого заметим, что косинус малого угла приближенно равен единице, а синус — радианной мере угла. Тогда при больших n получим:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = \left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)^n \simeq \left(1 + i\frac{\varphi}{n}\right)^n. \qquad (2.22)$$

Поскольку формула (2.22) очень похожа на приближенную формулу для экспоненты (2.18), выражение $\cos\varphi + i\sin\varphi$ отождествляют с комплексной экспонентой и обозначают [1] как $e^{i\varphi}$:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \qquad (2.23)$$

2.4.7. Извлечение корня n-й степени из комплексного числа. Пусть требуется подобрать число z, n-я степень которого равна известному комплексному числу w:

$$z^n = w, \qquad z-? \qquad (2.24)$$

Представим неизвестное число z и известное число w в тригонометрической форме

$$w = |w|e^{i\alpha}, \qquad z = |z|e^{i\varphi},$$

Здесь $|z|$ и φ — неизвестные, а $|w|$ и α — известные величины. Тогда уравнение (2.24) преобразуется к виду:

$$|z|^n e^{in\varphi} = |w|e^{i\alpha}.$$

Находим корни уравнения:

$$|z| = \sqrt[n]{|w|}, \qquad n\varphi = \alpha + 2\pi k, \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

[1] Поскольку для функции Эйлера используют запись $e^{i\varphi}$, необходимости в другом обозначении $E(\varphi)$ просто нет