

ПРИЛОЖЕНИЕ 6.1
К КУРСУ О.Ю.ШВЕДОВА
«ИСЧИСЛЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ В
ФИЗИКЕ»

задания для разбора с преподавателем

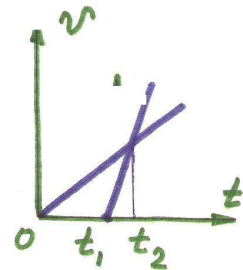
8. Скорость и ускорение

И8а.1 (Гольдфарб, 1.42) Свободно падающее тело за последние τ секунд падения прошло $1/3$ своего пути. Найдите время падения и высоту, с которой упало тело.

И8а.2 (Гольдфарб, 1.49) Аэростат поднимается с земли вертикально вверх с ускорением $a = 2 \text{ м/с}^2$. Через $\tau = 5 \text{ с}$ от начала его движения из него выпал предмет. Через какой промежуток времени t этот предмет упадет на землю?

И8а.3 (Гольдфарб, 1.48) Два тела брошены вертикально вверх из одной и той же точки с одинаковой начальной скоростью $v_0 = 19,6 \text{ м/с}$ с промежутком времени $\tau = 0,5 \text{ с}$. Через какое время t после бросания второго тела и на какой высоте h встретятся тела?

И8а.4 (Гольдфарб, 1.30) На рисунке представлены графики скоростей для двух тел, движущихся по одной прямой из одной и той же точки. Известны моменты времени t_1 и t_2 . В какой момент времени t_3 тела встретятся?



И8а.5 (химфак, 2002) Материальная точка, движущаяся прямолинейно равнопеременно, не изменяя направления движения, проходит два последовательных отрезка пути длиной l_1 и l_2 за времена t_1 и t_2 соответственно. Найти ускорение точки.

И8а.6 (Гольдфарб, 1.54) Двое играют мяч, бросая его друг другу. Какой наибольшей высоты достигнет мяч во время игры, если он от одного игрока к другому летит 2 с ?

И8а.7 (МГУ-1, 40) Тело брошено с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Сколько времени длится полет? На каком расстоянии от места бросания упадет тело? При каком значении угла α дальность полета будет максимальной?

И8а.8 (Гольдфарб, 1.61) Тело брошено под углом α к горизонту со скоростью v_0 . Определите скорость v этого тела на высоте h над горизонтом.

И8а.9 (НГУ, 1.3.11) Из отверстия шланга, прикрытого пальцем, бьют две струи под углом α и β к горизонту с одинаковой начальной скоростью v . На каком расстоянии от отверстия по горизонтали струи пересекутся?

И8а.10 (ВМК, 2003) Скорость снаряда при вылете из ствола пушки $V_0 = 500$ м/с. На какой максимальной высоте h снаряд может поразить цель, если расстояние от пушки до цели по горизонтали составляет $l = 1$ км? Величину ускорения свободного падения считать равной $g = 10$ м/с², сопротивление воздуха не учитывать.

И8а.11 () Координата тела x зависит от времени t по закону $x(t) = bt^3$ (b — постоянная величина). Найдите скорость и ускорение тела в зависимости от времени.

И8а.12 () Координата тела x зависит от времени t ($t > 0$) по закону $x(t) = bt - ct^3$ (b и c — положительные постоянные величины). Найдите скорость тела v_x в зависимости от времени t и определите, в какой момент t координата x максимальна. Чему равно максимальное значение координаты?

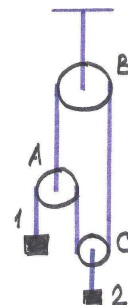
И8а.13 () Скорость тела зависит от времени по закону $v_x(t) = ct^2$ (c — постоянная величина). На какое расстояние переместится тело за промежуток времени от t_1 до t_2 ?

И8а.14 () Тело движется по прямой таким образом, что его скорость обратно пропорциональна координате: $v_x = A/x$ (A — постоянная величина). За какое время T тело пройдет расстояние от точки $x = x_1$ до точки $x = x_2$?

И8а.15 () Тело движется по прямой по закону $x(t) = \sqrt{L^2 - u^2 t^2}$ (L и u — постоянные величины). Определите зависимости скорости тела от времени и координаты.

9. Движение по окружности. Кинематические связи

И9а.1 (МГУ-1, 88, переработка) Грузы 1 и 2 перемещают вниз на расстояния x_1 и x_2 . На какое расстояние x_A переместится вниз блок А? Выразите скорость v_A и ускорение a_A блока через скорости v_1, v_2 и ускорения a_1, a_2 грузов.



И9а.2 (НГУ, 1.5.4) На клине с углом α лежит монета. С каким наименьшим ускорением должен двигаться клин по горизонтальной плоскости, чтобы монета свободно падала вниз?

И9а.3 () Согласно третьему закону Кеплера, период обращения планеты вокруг Солнца T пропорционален радиусу орбиты R планеты в степени $3/2$: $T = AR^{3/2}$ (A — постоянная величина). Как зависит от расстояния R ускорение планеты a ?

И9а.4 (НГУ, 1.3.21) С какой скоростью должен двигаться вокруг Земли вблизи ее поверхности искусственный спутник, чтобы его ускорение совпадало с ускорением свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$? Радиус Земли $R = 6400 \text{ км}$.

И9а.5 () Определите, во сколько раз ускорение Луны при ее движении вокруг Земли меньше ускорения свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$. Расстояние от Земли до Луны $r = 384000 \text{ км}$, период обращения Луны вокруг Земли $T = 27,3 \text{ сут}$.

И9а.6 (НГУ, 2.1.63, переработка) Горизонтальный диск начинают раскручивать вокруг его оси с линейно возрастающей во времени угловой скоростью $\omega = \varepsilon t$. Тело закреплено на расстоянии r от оси диска. Найдите зависимость модуля ускорения тела от времени.

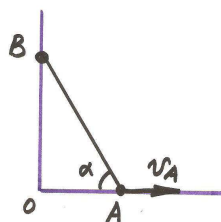
И9а.7 (Гольдфарб, 9.2-2) За какую часть периода T тело, совершающее гармонические колебания, проходит вторую половину пути от положения равновесия до крайнего положения?

И9а.8 () Напряжение на конденсаторе в электрической цепи колеблется по закону $U_1(t) = A_1 \sin \omega t$, на резисторе — по закону $U_2(t) = A_2 \cos \omega t$. Покажите, что суммарное напряжение на конденсаторе и резисторе также изменяется по гармоническому закону $U_1(t) + U_2(t) = A_3 \sin(\omega t + \alpha)$. Найдите амплитуду A_3 и начальную фазу колебаний α .

И9а.9 () Тело движется по окружности с центром в начале координат с угловой скоростью ω . Начальная x -координата тела равна x_0 , начальная x -компонента скорости равна v_{x0} . По окружности какого радиуса R движется тело? Как зависит его координата x от времени t ?

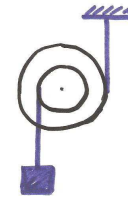
И9а.10 () Скорость тела зависит от времени по закону $v_x(t) = v_0 \sin \omega t$. На какое расстояние вдоль оси x перемещается тело за промежуток времени от $t = 0$ до $t = \pi/\omega$?

И9а.11 (Гольдфарб, 1.17) Стержень длиной $l = 1 \text{ м}$ шарнирно соединен с муфтами А и В, которые перемещаются по двум взаимно перпендикулярным рейкам. Муфта А движется с постоянной скоростью $v_A = 30 \text{ см/с}$. Найдите скорость v_B муфты В в момент, когда $\angle OAB = 60^\circ$.

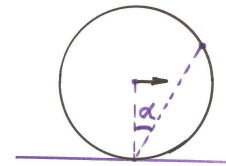


И9а.12 (МГУ-1, 21) Человек, стоящий на крутом берегу озера, тянет за веревку находящуюся на воде лодку. Скорость, с которой человек выбирает веревку, постоянна и равна v_0 . Какую скорость будет иметь лодка в момент, когда угол между веревкой и поверхностью воды равен α ?

И9а.13 (НГУ, 1.5.2) Угловая скорость катушки равна ω , радиусы внутреннего и внешнего цилиндра r и R . Каковы скорости оси катушки и груза относительно земли?



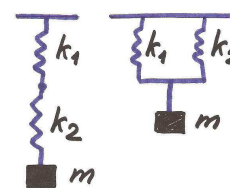
И9а.14 (Гольдфарб, 6.5, переработка) По горизонтальной плоскости катится без скольжения с постоянной скоростью v_C обруч радиуса R . Найдите угловую скорость вращения обруча. Выразите модуль скорости точки обруча как функцию угла α между вертикалью и прямой, проведенной через точку соприкосновения обруча с плоскостью и данную точку обруча.



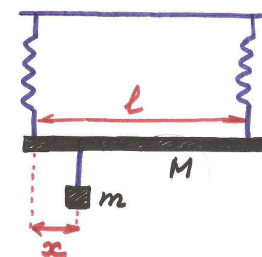
И9а.15 (физфак, 1999) Вырезанный из однородного листа металла равносторонний треугольник положили на гладкую горизонтальную плоскость и толкнули его. В некоторый момент скорость v_A вершины А этого треугольника оказалась перпендикулярной биссектрисе угла А, а скорость вершины С — направленной вдоль стороны АС. Найдите величину скорости v_0 , с которой движется центр треугольника.

10. Статика

И10а.1 (Гольдфарб, 8.14) Две пружины с коэффициентами упругости k_1 и k_2 соединены один раз последовательно, другой раз — параллельно. Какой должна быть жесткость пружины, которой можно было бы заменить эту систему из двух пружин?



И10а.2 (Гольдфарб, 8.20) Однородная балка массой M и длиной l подвешена за концы на двух пружинах. Обе пружины в нерастянутом состоянии имеют одинаковую длину, но жесткость левой пружины в n раз больше жесткости правой (при действии одинаковой нагрузки удлинение у правой пружины в n раз больше, чем у левой). На каком расстоянии x от левого конца балки надо подвесить груз массой m , чтобы она приняла горизонтальное положение?



И10а.3 (Гольдфарб, 10.7) Лыдина площадью поперечного сечения $S = 1 \text{ м}^2$ и высотой $H = 0,4 \text{ м}$ плавает в воде. Какую работу надо совершить, чтобы погрузить лыдину в воду? Плотность льда ρ составляет 0,9 от плотности воды ρ_0 .

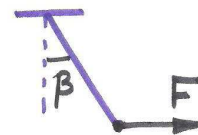
И10а.4 (Гольдфарб, 8.21) Шар массой $m = 4,9 \text{ кг}$ опирается на две гладкие плоскости. Левая плоскость образует с горизонтом угол $\alpha = 35^\circ$, а правая — $\beta = 20^\circ$. Определите силы F_1 и F_2 , с которыми шар давит на плоскости.

И10а.5 (Гольдфарб, 8.22) Колесо радиусом R и массой m стоит перед ступенькой высоты h . Какую наименьшую силу F надо приложить в горизонтальном направлении к оси O колеса, чтобы оно могло подняться на ступеньку? Трением пренебречь.

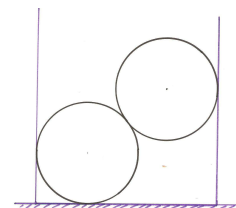
И10а.6 (НГУ, 2.8.9) Цепочка массы m подвешена за концы так, что вблизи точек подвеса она образует с горизонталью угол α . Определите силу натяжения цепочки в нижней точке и в точке подвеса.



И10а.7 (ВМК, 2004) Однородный стержень может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, проходящей через его конец. К другому концу стержня приложена сила, направленная горизонтально и перпендикулярно оси вращения стержня так, как показано на рисунке. Под действием этой силы стержень отклонен от вертикали на угол $\beta = 45^\circ$. Какой угол γ составляет с вертикалью сила, действующая на стержень со стороны оси?



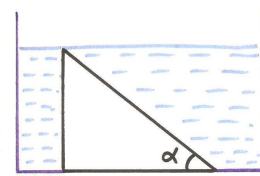
И10а.8 (Гольдфарб, 8.39) Два одинаковых шара радиусом r и массой m каждый помещены в вертикальный, открытый с обеих сторон полый цилиндр радиусом R ($r > R/2$). Вся система находится на горизонтальной плоскости. Какой должна быть минимальная масса полого цилиндра массой M , чтобы шары не могли его опрокинуть?



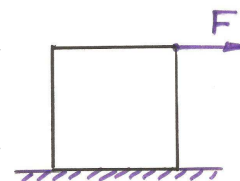
И10а.9 (физфак, 2004) На внутреннюю поверхность полусферы радиусом R , закрепленной так, что ее ось симметрии вертикальна, концом A опирается тонкая гладкая однородная палочка так, как показано на рисунке. При этом палочка касается края полусферы в некоторой точке B и образует с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$. Найти длину L палочки.



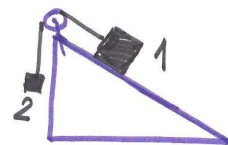
И10а.10 (химфак, 2002, переработка) На дне сосуда на одной из своих боковых граней лежит треугольная призма плотности ρ с основанием в виде прямоугольного треугольника с острым углом α . В сосуд наливают жидкость плотности ρ_0 вровень с верхним ребром призмы таким образом, что она под призму не подтекает. Во сколько раз увеличится сила давления призмы на дно сосуда? Атмосферное давление не учитывать.



И10а.11 (Гольдфарб, 8.16) К верхнему ребру однородного куба горизонтально прикладывают силу F . При каком минимальном значении F куб можно опрокинуть через ребро? Каким при этом может быть коэффициент трения материала стенок куба о горизонтальную плоскость? Масса куба M .

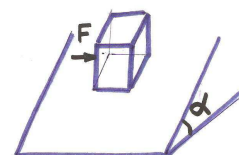


И10а.12 (ВМК, 1999) Два тела массами $m_1 = 0,4$ кг и $m_2 = 0,1$ кг соединены невесомой и нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый блок. Ось блока укреплена на неподвижной наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$. При каком минимальном значении коэффициента трения μ тела m_1 и m_2 будут находиться в покое? Трением в оси блока пренебречь.

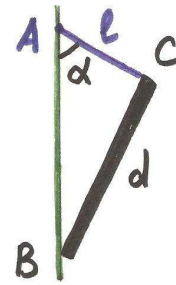


И10а.13 (МФТИ-1, 1.33, переработка) Легкая лестница длиной $l = 3$ м стоит, упираясь верхним закругленным концом в гладкую стену, а нижним — в пол. Угол наклона лестницы к горизонту $\alpha = 60^\circ$. На лестнице на расстоянии $a = 1$ м от ее верхнего конца стоит человек массой $M = 60$ кг. Найдите силу нормального давления и силу трения, действующие на нижний конец лестницы. Каким может быть коэффициент трения лестницы о пол?

И10а.14 (МФТИ-1, 1.40) Небольшой кубик массой $m = 100$ г покоится на шерховатой плоскости, наклоненной к горизонту под углом $\alpha = 30^\circ$. Коэффициент трения кубика о плоскость $\mu = 0,8$. С какой максимальной горизонтальной силой F можно толкать кубик, чтобы он еще оставался в покое? Сила лежит в плоскости склона.



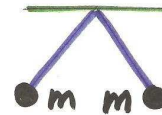
И10а.15 (МГУ-1, 144) Картина подвешена к вертикальной стене с помощью шнура AC длины l , образующего со стеной угол α . Высота картины $BC = d = l$ совпадает с длиной шнура. Нижняя часть картины не закреплена. При каком значении коэффициента трения между картиной и стеной картина будет находиться в равновесии?



11. Электростатика

И11а.1 (Гольдфарб, 15.15) Заряды $+Q$, $-Q$ и $+q$ расположены в углах правильного треугольника со стороной a . Каково направление силы, действующей на заряд $+q$?

И11а.2 (НГУ, 6.1.9) Два одинаково заряженных шарика массы m , подвешенных в одной точке на нитях длины l , разошлись так, что угол между нитями стал прямым. Определите заряд шариков.



И11а.3 (Гольдфарб, 15.11) Два заряженных шарика, подвешенных на нитях одинаковой длины, опускаются в керосин. Какова плотность ρ материала шариков, если угол расхождения нитей в воздухе и в керосине один и тот же? Диэлектрическая проницаемость керосина $\epsilon = 2$, плотность $\rho = 0,8 \text{ г/см}^3$.

И11а.4 (Иродов, 3.4) Два положительных заряда q_1 и q_2 находятся на расстоянии L друг от друга. Определите, какой отрицательный заряд $-q_3$ и в какую точку надо поместить, чтобы сила, действующая на каждый из трех зарядов, равнялась нулю.

И11а.5 (Гольдфарб, 16.10) Два точечных заряда $q_1 = 6,6 \cdot 10^{-9}$ Кл и $q_2 = 1,32 \cdot 10^{-8}$ Кл находятся на расстоянии $r_1 = 40$ см. Какую работу надо совершить, чтобы сблизить их до расстояния $r_2 = 25$ см?

И11а.6 () Два точечных заряда $+q$ находятся на расстоянии $2l$ друг от друга. Найдите потенциал и величину напряженности электрического поля в точке, находящейся на одинаковом расстоянии r ($r > l$) от каждого из двух зарядов.

И11а.7 () Электрический диполь состоит из двух электрических зарядов $+q$ и $-q$, находящихся на расстоянии l друг от друга. Его поместили в электрическое поле E , направленное под углом α к вектору, соединяющему отрицательный заряд с положительным. Найдите момент сил,

действующих на диполь. С какой энергией взаимодействует диполь с электрическим полем? Выразите ответ через дипольный момент $p = ql$ диполя.

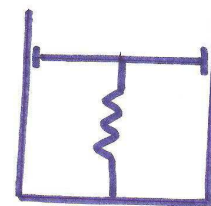
И11а.8 (МГУ-1, 420) Найдите напряженность поля электрического диполя, обладающего моментом $p = ql$ в точке, отстоящей от оси диполя на расстоянии $r \gg l$, в случаях: (а) точка лежит на прямой, проходящей через ось диполя; (б) точка лежит на прямой, перпендикулярной оси диполя.

И11а.9 (Гольдфарб, 16.16) Пылинка находится в равновесии в плоском конденсаторе. Ее масса $m = 10^{-11}$ г, расстояние между пластинами конденсатора $d = 0,5$ см. При освещении пылинки ультрафиолетовым светом она теряет часть заряда, и равновесие нарушается. Какой заряд потеряла пылинка, если первоначально разность потенциалов на конденсаторе составляла $U = 154$ В, а затем, чтобы пылинка снова вернулась в состояние равновесия, пришлось увеличить разность потенциалов на $\Delta U = 8$ В?

И11а.10 (ВМК, 2001) Два маленьких тела с равными зарядами q расположены на внутренней поверхности гладкой непроводящей сферы радиусом R . Первое тело закреплено в нижней точке сферы, а второе может свободно скользить по ее поверхности. Найти массу второго тела, если известно, что в состоянии равновесия оно находится на высоте h от нижней точки сферы.

12. Элементы термодинамики

И12а.1 (МФТИ-1, 2.49, переработка) В вертикально расположенном цилиндре находится газ в количестве ν . Газ отделен от атмосферы поршнем, соединенным с дном цилиндра пружиной жесткостью k . При температуре T_1 поршень расположен на расстоянии h от дна цилиндра. До какой температуры T_2 надо нагреть газ, чтобы поршень поднялся до высоты H ?

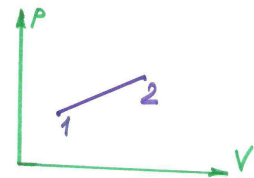


И12а.2 (Гольдфарб, 13.17, переработка) В нижней части цилиндрического сосуда под поршнем находится воздух в количестве $\nu = 1$ моль. Воздух под поршнем нагревается на $\Delta t = 1^\circ\text{C}$, при этом поршень поднимается. Определите работу, которую совершает воздух при расширении, перемещая поршень.

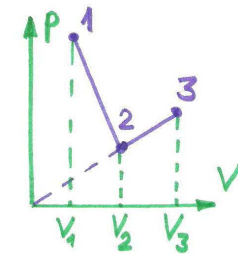
И12а.3 (МФТИ-1, 2.195, переработка) Идеальный газ в количестве ν требуется перевести из начального состояния с объемом V_1 и давлением $6p_1$ в состояние с объемом $2V_1$ и давлением p_1 . Давление при этом в течение всего процесса не должно превышать $6p_1$, а объем должен все время увеличиваться. Какую максимальную работу может совершить газ в этом процессе? Чему равна эта работа?

И12а.4 (МФТИ-1, 2.172) В герметичном сосуде вместимостью $V = 5,6$ л содержится воздух при давлении $p = 10^5$ Па. Какое давление установится в сосуде, если воздуху сообщить количество теплоты $Q = 1430$ Дж? Молярная изохорная теплоемкость воздуха $C_V = 21$ Дж/(моль · К).

И12а.5 (химфак, 2005, переработка) Над идеальным одноатомным газом в количестве $\nu = 1$ моль производят процесс, график которого в pV -координатах изображен на рисунке. При этом $p_2 = 2p_1$ и $V_2 = 3V_1$. Какую работу совершил газ в данном процессе? На сколько изменилась внутренняя энергия газа? Какое количество теплоты получил газ? Начальная температура газа была равна $T_1 = 180$ К. Универсальная газовая постоянная $R = 8,3$ Дж/(моль · К).



И12а.6 (физфак, 1999, переработка) Идеальный газ в количестве ν переводят из состояния 1 в состояние 3 так, как показано на pV -диаграмме. В начальном и конечном состояниях температуры газа одинаковы и равны T . Зная, что $\sqrt{V_2/V_1} = (V_3/V_2)^2 = \alpha$, найдите работу, совершенную газом в данном процессе.

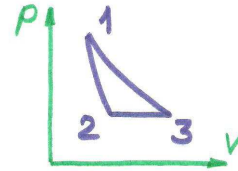


И12а.7 (НГУ, 5.6.4) В сосуде вместимости V_1 находится одноатомный газ при давлении P_1 и температуре T_1 , а в сосуде вместимости V_2 — одноатомный газ при давлении P_2 и температуре T_2 . Какое давление и какая температура окажутся в этих сосудах после их соединения? Сосуды теплоизолированы.

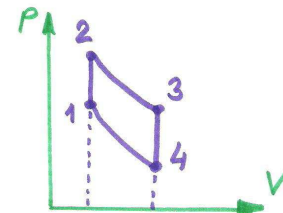
И12а.8 (НГУ, 5.6.31) В вакуумном пространстве вертикально стоит цилиндрический сосуд, закрытый сверху подвижным поршнем массы M . Внутри сосуда находится одноатомный газ при давлении P . Внутреннее сечение цилиндра S , а поршень находится на высоте H над его дном. Поршень отпустили. После непродолжительных колебаний он остановился. На каком расстоянии от начального положения остановился пор-

шень? Теплоемкостью поршня и цилиндра можно пренебречь. Вся система теплоизолирована.

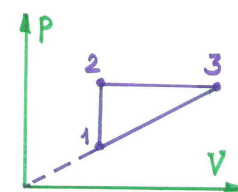
И12а.9 (МФТИ-1, 2.224) Одноатомный идеальный газ в количестве $\nu = 1$ моль совершает цикл, состоящий из трех процессов: адиабатного расширения, изобарного расширения и изотермического сжатия. На сколько изменилась температура в изобарном процессе, если в процессе адиабатного расширения газ совершил работу $A = 2500$ Дж?



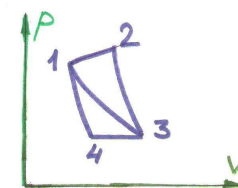
И12а.10 (ВМК, 2005) В тепловом двигателе, рабочим телом которого является идеальный одноатомный газ, совершается циклический процесс, изображенный на рисунке. Участок 23 — адиабатическое расширение, 41 — адиабатическое сжатие. Найти коэффициент полезного действия двигателя η , если известно, что температура газа при адиабатическом расширении уменьшается в n раз, а при адиабатическом сжатии увеличивается в n раз, где $n = 1,5$.



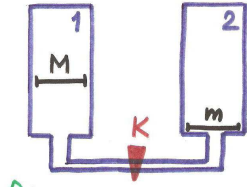
И12а.11 (ВМК, 2003) Над идеальным одноатомным газом совершается циклический процесс, изображенный на рисунке. Отношение максимального объема газа к минимальному в этом цикле равно $n = 3$. Найти коэффициент полезного действия цикла η .



И12а.12 (МФТИ-1, 2.228) КПД цикла, состоящего из участка 12, адиабаты 23 и изотермы 31, равен η_1 , а цикла, состоящего из изотермы 13, изобары 34 и адиабаты 41, равен η_2 . Чему равен КПД тепловой машины, работающей по циклу 12341? Все циклы обходятся по часовой стрелке. Рабочим веществом является идеальный газ.



И12а.13 (МФТИ-1, 2.183) Два одинаковых теплоизолированных сосуда соединены друг с другом тонкой короткой теплоизолированной трубкой с краном К, закрытым в начальный момент. В сосуде 1 под поршнем, масса которого равна M , при температуре T_0 находится идеальный одноатомный газ в количестве ν , молярная масса которого равна μ . В сосуде 2 газа нет, и поршень, масса которого равна $M/2$, лежит на дне сосуда. Объем между поршнем и верхней крышкой в каждом сосуде вакуумирован. Кран открывают, газ из сосуда 1 устремляется под поршень сосуда 2, и тот начинает подниматься. Вычислите температуру газа после установления равновесия в сосудах. При равновесии между поршнем и крышкой в сосуде 2 остается свободное пространство. Произведите расчет для $\mu\nu/M = 0, 1$.



И12а.14 (Иродов, 2.44, переработка) Над идеальным одноатомным газом в количестве ν молей совершают процесс, в котором давление является степенной функцией объема: $pV^n = \text{const}$. Начальная температура газа равна T_1 , конечная — равна T_2 . Какую работу совершил газ в данном процессе? Какое количество теплоты получил газ? Найдите теплоемкость газа в данном процессе.

И12а.15 (физфак, 2001, переработка) Зависимость от температуры молярной теплоемкости c_μ идеального одноатомного газа в цикле тепловой машины, который состоит из трех последовательных процессов 1-2, 2-3, 3-1, изображена на рисунке. Здесь R — универсальная газовая постоянная. Изобразите цикл в pV -координатах. Зная, что $T_2/T_1 = n$, рассчитайте КПД цикла.

