

ПРИЛОЖЕНИЕ 3.3
К КУРСУ О.Ю.ШВЕДОВА
«ВВЕДЕНИЕ В АЛГЕБРУ И АНАЛИЗ»

задания повышенной трудности

Москва — Курск — Орел — Рязань, 2010 г.

ВАРИАНТ 1

A1с.1 (Сканави, 2.138) Решите уравнение

$$\frac{z+4}{z-1} + \frac{z-4}{z+1} = \frac{z+8}{z-2} + \frac{z-8}{z+2} + 6.$$

A1с.2 (биологи, 1998) Вычислите

$$\log_{d^4 \cdot \sqrt[5]{c^6}} \left(\frac{c \cdot \sqrt[3]{c}}{\sqrt[5]{d}} \right),$$

если $\log_c d = 5$.

A1с.3 (Сканави, 3.249) От пункта А вдоль шоссе удаляется гонщик со скоростью a км/ч. Спустя 30 мин. из того же пункта стартовал второй гонщик со скоростью $1,25a$ км/ч. Через сколько минут после старта первого гонщика был отправлен из того же пункта третий гонщик со скоростью $1,5a$ км/ч, если он одновременно со вторым гонщиком догнал первого?

A1с.4 (физфак, 1973) Три различных числа a , b и c , сумма которых равна 124, являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии. Одновременно эти три числа a , b и c являются соответственно третьим, тринадцатым и пятнадцатым членами арифметической прогрессии. Найдите числа a , b и c .

A1с.5 (Сканави, 10.078) При каких значениях p функция $f(x) = \cos x - px$ убывает на всей числовой оси?

ВАРИАНТ 2

A2с.1 (ФГУ, 2003) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2xy - z^2 = 4 \end{cases}$$

A2с.2 (ГИА-9,13D06) Сравните $\sqrt{19} + \sqrt{15}$ и $\sqrt{13} + \sqrt{21}$.

A2с.3 (Сканави, 3.315) Соревнуются три бригады лесорубов. Первая и третья бригада обработали древесины в 2 раза больше, чем вторая, а вторая и третья — в 3 раза больше, чем первая. Какая бригада победила в этом соревновании?

A2с.4 (ВМК, 1990) Среди первых двадцати пяти членов арифметической прогрессии сумма членов с нечетными номерами на 19 больше, чем с четными. Найдите двенадцатый член прогрессии, если ее двадцатый член равен утроенному девятому.

А2с.5 (Сканави, 10.138) Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \operatorname{tg} 3x$ в точке с абсциссой $x = \pi/3$.

ВАРИАНТ 3

А3с.1 (геологи, 1997) Сколько корней имеет уравнение

$$\sqrt{6}(x^2 + 2) + 2x\sqrt{5} = \sqrt[4]{35}(x^2 - 2) + 2x\sqrt{7}.$$

А3с.2 (Сканави, 1.067) Упростите выражение

$$\frac{\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}}{(\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2})}$$

А3с.3 (Сканави, 3.283) На пристани с теплохода сошли два пассажира и направились в один и тот же поселок. Один из них шел первую половину пути со скоростью 5 км/ч, а вторую половину — со скоростью 4 км/ч. Другой шел первую половину времени со скоростью 5 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 4 км/ч и пришел на 1 минуту раньше первого. За какое время каждый из них прошел весь путь и каково расстояние между пристанью и поселком?

А3с.4 (географы, 1994) Сумма первых двадцати пяти членов одной арифметической прогрессии в пять раз больше суммы первых двадцати членов другой арифметической прогрессии, имеющей ненулевую разность. Найдите отношение разностей этих прогрессий, если девятнадцатый член первой прогрессии вчетверо больше двенадцатого члена второй.

А3с.5 (Сканави, 10.074) Найдите суммы $1 + x + \dots + x^n$ и $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$.

ВАРИАНТ 4

А4с.1 (Сканави, 2.126) При каком целом значении k один из корней уравнения $4x^2 - (3k + 2)x + (k^2 - 1) = 0$ втрое меньше другого?

А4с.2 (мехмат, 2007) Учитель назвал Пете натуральное число и попросил найти сумму его логарифмов по основаниям 3 и 75. Однако Петя, по ошибке, не сложил эти логарифмы, а перемножил их, получив неверный ответ, который оказался вдвое меньше верного. Какое число назвал ему учитель?

А4с.3 (геологи, 1999) Пункты А и В расположены на реке: из А в В вышел катер, из В в А одновременно с ним — моторная лодка. Пройдя $\frac{3}{4}$ пути от А к В, катер встретился с лодкой, а достигнув В, повернул обратно и прибыл в А одновременно с ней. Найти отношение собственных скоростей катера и лодки.

А4с.4 (филфак, 1985) Числа a_1, a_2, a_3, a_4 образуют арифметическую прогрессию, а числа $a_1, a_2, a_4, a_4 + 12$ — геометрическую прогрессию. Найдите a_2 .

А4с.5 (Сканави, 10.166) Найдите точки максимума и минимума функции $y(x) = \frac{x}{\ln x}$.

ВАРИАНТ 5

А5с.1 (геологи, 1999) Найдите $x_1 + 3x_1x_2 + x_2$, где $x_{1,2}$ — корни уравнения

$$2x^2 + (1 - 3\sqrt{2})x - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 0.$$

А5с.2 (Сканави, 9.354) Найдите произведение $\sqrt{a}\sqrt[4]{a}\dots\sqrt[512]{a}$.

А5с.3 (Сканави, 3.317) Арбузы, привезенные на базу, предназначены для двух магазинов. Первый магазин сразу приступил к перевозке арбузов и перевозил их ежедневно одинаковыми по массе порциями. Второй магазин приступил к перевозке арбузов на a дней позже и также перевозил их ежедневно одинаковыми по массе, но иными, чем первый магазин, порциями. Через b дней, прошедших от начала перевозочных операций, на базе осталась половина первоначального количества арбузов. За сколько дней были вывезены все арбузы с базы, если перевозка закончилась одновременно и масса арбузов, полученных первым магазином, равна массе арбузов, полученных вторым магазином?

А5с.4 (ВМК, 1995) Разность арифметической прогрессии отлична от нуля, а сумма членов с четвертого по четырнадцатый равна 77. Найдите номер того ее члена, который равен 7.

А5с.5 (Сканави, 10.108) Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{1+x}} + \frac{1}{\sqrt[n]{1-x}}$ при $0 \leq x < 1$.

ВАРИАНТ 6

А6с.1 (Сканави, 2.129) При каком значении a уравнения $x^2 + ax + 8 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$ имеют общий корень?

А6с.2 (биологи, 1994) Какое из двух чисел больше: $\sqrt{11}$ или $9^{\frac{1}{2} \log_3(1+1/9) + \frac{3}{2} \log_8 2}$?

А6с.3 (Сканави, 3.356) Сначала катер шел a км по озеру, а затем половину этого расстояния по реке, впадающей в озеро и текущей со скоростью s км/ч. Весь рейс продолжался 1 ч. Найдите собственную скорость катера.

А6с.4 (химфак, 2001) Первый член последовательности $a_1, a_2, \dots$ равен 1, а каждый последующий член равен удвоенной сумме всех предыдущих. Найдите $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{2001}$.

А6с.5 (Сканави, 10.157) В каких точках касательная к графику функции $y = \frac{x+2}{x-2}$ образует с осью Ox угол 135° ?

ВАРИАНТ 7

А7с.1 (Сканави, 2.246) Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня. Составьте новое квадратное уравнение, у которого один из корней на единицу меньше большего корня, а другой — на единицу больше меньшего корня данного уравнения.

А7с.2 (Ломоносов-2007) Какие значения может принимать выражение

$$\log_{b_{11}b_{50}}(b_1b_2\dots b_{60}),$$

где $b_1, b_2, \dots$ — геометрическая прогрессия?

А7с.3 (биофак, 1978) Пароход идет от пристани А на притоке вниз по его течению 80 км до реки, а затем вверх против течения реки до пристани В, затратив на весь путь 18 ч. Обратный его путь занимает 15 ч. Найдите длину пути от А до В и скорость притока, если скорость парохода равна 18 км/ч, а скорость течения реки 3 км/ч.

А7с.4 (химфак, 1999) Последовательность $a_1, a_2, \dots$ удовлетворяет при каждом натуральном n условию

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ 2a_n, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$$

Найдите a_{1999} , если $a_1 = 0$.

А7с.5 (Сканави, 10.167) Найдите точки максимума и минимума функции $y(x) = \frac{\ln x + 2}{x}$.

ВАРИАНТ 8

А8с.1 (Сканави, 2.141) Решите уравнение $(2x + a)^5 - (2x - a)^5 = 242a^5$.

А8с.2 (географы, 2004) Сколько цифр содержится в десятичной записи 9998-го члена последовательности a_n , если $a_1 = 0$, $a_{n+1} = 5a_n + 500$, $\lg 5 = 0,698970\dots$?

А8с.3 (ГИА-9, 82D08) Канистра содержит 31 л кислоты. Из нее отливают три литра кислоты и доливают три литра воды. Такую операцию повторяют n раз. Сколько кислоты останется в канистре?

А8с.4 (почвоведы, 2001) Найдите сумму

$$7 + 77 + \dots + 77\dots 7 \text{ (} n \text{ семерок в последнем слагаемом).}$$

А8с.5 (Сканави, 10.246) Рассчитайте интеграл $\int_1^e \frac{dx}{0,5x}$.

ВАРИАНТ 9

А9с.1 (Сканави, 2.252) Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа x_1 и x_2 , удовлетворяющие свойствам $x_1 - x_2 = 5$ и $x_1^3 - x_2^3 = 35$.

А9с.2 (геологи, 1994) Какое из чисел больше: $2\sqrt{17}$ или 8, (24)?

А9с.3 (Сканави, 3.251) С одного старта в одном и том же направлении одновременно начали гонки два мотоциклиста: один со скоростью 80 км/ч, другой — со скоростью 60 км/ч. Через полчаса с того же старта в том же направлении направился третий гонщик. Найдите его скорость, если он догнал первого гонщика на 1 ч 15 минут позже второго.

А9с.4 (социофак, 1998) Найдите все натуральные n , при которых арифметическая прогрессия не восстанавливается однозначно по ее семнадцатому члену и сумме первых n членов.

А9с.5 (Сканави, 10.091) Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin(\pi/4+x)}$ при $0 \leq x \leq \pi/2$.

ВАРИАНТ 10

А10с.1 (химфак, 2003) Найдите все a , при которых уравнение $ax^2 + (a+1)x + 1 = 0$ имеет единственный корень.

А10с.2 (Сканави, 7.320, переработка) Упростите выражение $((\log_7^4 13 + \log_{13}^4 7 + 2)^{1/2} - 2)^{1/2}$.

А10с.3 (ГИА-9, 82D07) Водитель знает, что зимой его автомобиль на каждые 100 км пробега расходует на 1 л бензина больше, чем летом. Какое расстояние зимой проедет водитель, израсходовав $1/4$ бака, если летом он может проехать 672 км, израсходовав полный бак? Емкость бака 56 л.

A10с.4 (ВМК, 2003) Найдите знаменатель геометрической прогрессии, сумма первых тридцати членов которой равна удвоенной сумме первых десяти членов.

A10с.5 (Сканави, 10.151) Составьте уравнения касательных к кривым $y = 2x^2 - 5$ и $y = x^2 - 3x + 5$, проведенных через точку пересечения этих кривых.