

ПРИЛОЖЕНИЕ 3.1
К КУРСУ О.Ю.ШВЕДОВА
«ВВЕДЕНИЕ В АЛГЕБРУ И АНАЛИЗ»

задания для разбора с преподавателем

Москва — Курск — Орел — Рязань, 2010 г.

1. Квадратные уравнения

A1a.1 (ГИА-9, 31C02) Решите уравнение $(x^2 + 10x + 16)^2 + (x^2 + 11x + 24)^2 = 0$.

A1a.2 (ГИА-9, 31C03) Решите уравнение $(x^2 + 27x - 57)^2 = (x^2 - 3x + 1)^2$.

A1a.3 (ГИА-9, 31C04) Решите уравнение $(3x + 7)^3 = (2x)^6$.

A1a.4 (ГИА-9, 31C05) Решите уравнение $(x - 2)^3 + (x - 4)^3 = 2(x - 3)^3$.

A1a.5 (ГИА-9, 31C09) Решите уравнение $(x - 4)(x - 3)^3 = (x - 3)(x - 4)^3$.

A1a.6 (ГИА-9, 31C10) Решите уравнение $(x^2 - x)^2 - 14(x^2 - x) + 24 = 0$.

A1a.7 (ГИА-9, 32C03) Решите уравнение $8 - \frac{3}{u+1} = -\frac{19}{u-7}$.

A1a.8 (ГИА-9, 32C07) Решите уравнение $\frac{x^2}{x^2+27} - \frac{4}{x^2+7} = 0$.

A1a.9 (ГИА-9, 32C09) Решите уравнение $\frac{3x+2}{2x+3} + \frac{2x+3}{3x+2} = -2$.

A1a.10 (ГИА-9, 51C07) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 6x + 5y = 44, \\ xy = 16 \end{cases}$$

A1a.11 (ГИА-9, 52C10) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x = 4y, \\ \frac{4}{x} + \frac{3}{y-2} = 4 \end{cases}$$

A1a.12 (Сканави, 2.001) Решите уравнение $\frac{x-3}{x-1} + \frac{x+3}{x+1} = \frac{x+6}{x+2} + \frac{x-6}{x-2}$.

A1a.13 (Сканави, 2.002) Решите уравнение

$$\frac{x^2 + 1}{x - 4} - \frac{x^2 - 1}{x + 3} = 23.$$

A1a.14 (Сканави, 2.067) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x^3 - y^3 = 7. \end{cases}$$

A1a.15 (Сканави, 2.007) Решите уравнение

$$\frac{b}{x-a} + \frac{a}{x-b} = 2.$$

2. Рациональные неравенства

A2a.1 () Найдите все значения x , при которых наибольшее из чисел $x + 1$ и $4x + 5$ больше нуля.

A2a.2 () Решите неравенство $\frac{x-1}{x-2} > 0$.

A2a.3 () Решите неравенство $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3} \geq 0$,

A2a.4 () Решите неравенство $\frac{2}{x} > \frac{3}{x-1}$.

A2a.5 () Решите неравенство $x^2 + 2x + 4 \leq 0$.

A2a.6 () Решите неравенство $x^2 + 2x - 3 \leq 0$.

A2a.7 (физфак, 1997) Решите неравенство

$$\frac{3x}{x^2 - 9} \leq \frac{1}{x + 2}.$$

A2a.8 (физфак, 2004) Решите систему неравенств $-2 < \frac{6}{x^2 - x - 6} < -1$.

A2a.9 (физфак, 1977) Найдите все значения параметра c , для каждого из которых числа x и y , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x + 7y = c, \\ 2x - y = 5, \end{cases}$$

удовлетворяют также неравенству $x > y - 2$.

A2a.10 (филфак, 2004) При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - x + \frac{3-a}{2a+1} = 0$ не имеет решений?

3. Задачи с квадратными уравнениями

A3a.1 () Лодка прошла по течению реки 48 км и вернулась обратно за 10 ч. Скорость лодки в стоячей воде составляет 10 км/ч. Найдите скорость течения реки.

A3a.2 () Алиса ходит быстрее Василисы на 2 км/ч. Путь в 12 км Алиса проходит на 0,5 ч быстрее. Найдите скорости Алисы и Василисы.

A3a.3 (ГИА-9, 81B07) Прозаик хочет набрать на компьютере рукопись объемом 450 страниц. Если он будет набирать на 5 страниц в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 3 дня раньше. Сколько страниц в день планирует набирать прозаик?

A3a.4 (ФГУ, 2002) За сколько часов два экскаватора вместе выкапывают котлован, если в одиночку они делают это на 4 ч и, соответственно, на 9 ч дольше?

АЗа.5 (геологи, 1977) Два бегуна стартовали друг за другом с интервалом в 2 мин. Второй бегун догнал первого на расстоянии 1 км от точки старта, пробежал еще 4 км и повернул обратно, встретившись с первым бегуном через 20 мин после старта первого бегуна. Найдите скорость второго бегуна.

АЗа.6 (биофак, 1990) Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми равно 300 км, выехал легковой автомобиль, а из В в А одновременно с ним — грузовой. После встречи, которая произошла через 4 ч, легковой автомобиль увеличил скорость на 15 км/ч, а грузовой — на 30 км/ч. Найдите первоначальную скорость легкового автомобиля, если он прибыл в пункт В на 1 час раньше, чем грузовой в А.

АЗа.7 (географы, 1989) Из пункта А по дороге, идущей в гору, одновременно отправились пешеход со скоростью 6 км/ч и автобус. Доехав менее чем за 1 ч до пункта В, находящегося на расстоянии 12 км от А, автобус поехал обратно и через 12 мин встретил пешехода. Найдите скорость автобуса на подъеме, если она вдвое меньше его скорости на спуске.

АЗа.8 (химфак, 1990) Два насоса, работая вместе, наполняют бассейн водой за 10 ч, причем первый из них наполняет бассейн на 15 ч быстрее второго. Первый насос включили в 6.00, второй — в 8.00, а в 12.00 в бассейне оказалось 400^3 воды. Какова емкость бассейна?

АЗа.9 (физфак, 1971, переработка) Бригада рабочих из 40 человек должна выполнить работу. Обычно каждый рабочий изготавливает одну деталь в час. Руководитель предприятия решил отправить несколько рабочих в отпуск на период изготовления N деталей. После отпуска, когда надо было изготовить еще $2N$ деталей, каждый из отдохнувших рабочих стал изготавливать три детали в час. Сколько рабочих надо было отправить в отпуск на период выполнения первой трети работы, чтобы вся работа была выполнена как можно скорее?

АЗа.10 (экономисты, 1977) Из пункта А в пункт В выехал велосипедист. Когда он проехал четверть пути, из пункта В навстречу ему выехал мотоциклист, который, добравшись до А, поехал с увеличенной скоростью обратно и прибыл в В одновременно с велосипедистом, потратив на обратный путь столько же времени, сколько до встречи с велосипедистом. Во сколько раз мотоциклист увеличил скорость на обратном пути?

4. Последовательности и прогрессии

A4a.1 () Рассчитайте сумму всех четных чисел от 24 до 141.

A4a.2 () Переведите в обыкновенную дробь периодическую дробь $1,2(45)$.

A4a.3 (Ретро, задача 19) Один воин вышел из города и проходил по 12 верст в день, а другой вышел одновременно с ним и шел так: в первый день прошел 1 версту, во второй день — 2 версты, в третий день — 3 версты, в четвертый — 4 версты и т.д. Через сколько дней второй воин настигнет первого?

A4a.4 () Снаряд, выпущенный из пушки вертикально вверх, в первую секунду прошел 100 метров, а в каждую следующую секунду — на 10 метров меньше, чем в предыдущую. Сколько метров пройдет снаряд за n секунд?

A4a.5 (ВМК, 1999) Пункты A , B , C и D расположены последовательно по прямой дороге, а расстояния AB , BC и CD образуют геометрическую прогрессию. Из пункта A со скоростью 5 км/ч вышел пешеход, который за 3 ч добрался до D и, повернув обратно, через 2 ч прибыл в B . Найдите BC .

A4a.6 (ВМК, 1988) Найдите сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, если сумма третьего, седьмого, четырнадцатого и восемнадцатого ее членов равна 10.

A4a.7 (Спивак, задача 128) Над озерами летели гуси. На каждом озере садились половина гусей и еще полгуся, остальные летели дальше. Все сели на 7 озерах. Сколько было гусей?

A4a.8 () Геометрическая прогрессия $\{b_n\}$ удовлетворяет свойству $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$. Каким может быть знаменатель этой прогрессии?

A4a.9 () Последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет свойствам $a_{n+1} = 3a_n + 2$, $a_1 = 1$. Найдите a_n .

A4a.10 (Сканави, 6.080) Найдите сумму $1 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + \dots + (2n - 1) \cdot 3^n$.

5. Степени и радикалы

A5a.1 (ГИА-9, 13B07) Упростите $\frac{\sqrt{2,8} \cdot \sqrt{4,2}}{\sqrt{0,24}}$.

A5a.2 (ГИА-9, 23C07) Найдите $\sqrt{b+30}$, если $\sqrt{b-30} = 2$.

A5a.3 (почвоведы, 1996) Докажите, что число

$$((\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{27})^2 + 7)((\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{27})^2 - 7)$$

целое и найдите его значение.

А5а.4 (ГИА-9, 13С09) Сравните $\sqrt{152 \cdot 155} - 132$ и $\sqrt{154 \cdot 151} - 134$.

А5а.5 (Сканави, 9.345а) Что больше: $0,8^{-1,3}$ или $0,8^{-1,4}$?

А5а.6 (экономисты, 1988) Какое из чисел больше, $\sqrt[3]{4} + \sqrt{2}$ или 3? Ответ должен быть обоснован.

А5а.7 (Сканави, 9.352) Найдите произведение xy , если $x + y = a$ и $x^4 + y^4 = b$.

А5а.8 (ГИА-9, 13С01) Упростите $\sqrt{67 - 16\sqrt{3}}$.

А5а.9 (ГИА-9, 13С07) Найдите значение выражения $\sqrt{83 + 18\sqrt{2}} - \sqrt{2}$.

А5а.10 (Сканави, 1.299) Вычислите $\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}$.

6. Логарифмы

А6а.1 (Сканави, 9.323) Определите знак числа

$$\frac{\log_3 5 - \log_5 3}{\log_{0,3} 4 - \log_{0,3} 3}.$$

А6а.2 (Сканави, 9.328) Вычислите $49^{1-\log_7 2} + 5^{-\log_5 4}$.

А6а.3 (Сканави, 7.059) Вычислите $\log_{0,5} 28$, если $\log_7 2 = a$.

А6а.4 (Сканави, 7.202) Найдите $\log_{30} 8$, если $\log_{10} 5 = a$ и $\log_{10} 3 = b$.

А6а.5 (Сканави, 9.349) Найдите $c = \sqrt[15]{a^{-5}b^3}$, если $\log_{10} a = -0,6498$, а $\log_{10} b = 13,9170$.

А6а.6 (мехмат, 1992) Даны числа a и b такие, что $a = \log_y x$, $b = \log_z x$. Найдите $\log_{\sqrt[3]{xyz}} \left(\frac{yz}{x^3} \right)^2$.

А6а.7 (Ломоносов-2006) Вычислите

$$\log_4 \log_2 \sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{16}}}$$

(40 знаков радикала).

А6а.8 (филологи, 1988) Вычислите

$$\frac{\log_5 30}{\log_{150} 5} - \frac{\log_5 750}{\log_6 5}.$$

А6а.9 (Сканави, 7.321) Что больше: $\log_{135} 675$ или $\log_{45} 75$?

А6а.10 (психологи, 1994) Сравните $3 \log_2 5$ и $\sqrt{9 \log_2 5 + 28}$.

7. Производные

A7a.1 (Сканави, 10.077) Покажите, что функция $f(x) = x^3 + 4x$ возрастает.

A7a.2 (Сканави, 10.147) Под каким углом к оси Ox наклонена касательная, проведенная к кривой $y = 2x^3 - x$ в точке пересечения с осью Oy ?

A7a.3 (Сканави, 10.144) Покажите, что на графике функции $y = x^3 + x^2 + x + 1$ нет точек, в которых касательные параллельны оси абсцисс.

A7a.4 (Сканави, 10.145) В каких точках касательные к кривой $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - x + 1$ параллельны прямой $y = 2x - 1$ или совпадают с ней?

A7a.5 (Сканави, 10.182) Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = x + 4/x^2$.

A7a.6 (Сканави, 10.173) Найдите экстремумы функции $f(x) = x^3 + 3/x$.

A7a.7 (Сканави, 10.088) Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ при $-2 \leq x \leq 2$.

A7a.8 (Сканави, 10.083) Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = x(x - 3)^2$.

A7a.9 () Рассчитайте производную функции $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

A7a.10 () Рассчитайте производную функции $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

A7a.11 (Сканави, 10.186) Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$.

A7a.12 (Сканави, 10.079) Докажите, что функция $f(x) = \sin x + 2x$ возрастает на всей числовой оси.

A7a.13 (Сканави, 10.027) Рассчитайте производную функции $f(x) = \cos^2 3x$.

A7a.14 (Сканави, 10.095) Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x + \cos^2 x$ при $0 \leq x \leq \pi/2$.

A7a.15 () Рассчитайте производную функции $f(x) = \operatorname{tg} x$.

8. Интегралы

A8a.1 (Сканави, 10.228) Найдите функцию $F(x)$, если известно, что $\frac{dF}{dx} = 4x^3 - 3x^2$ и $F(1) = 3$.

А8а.2 (Сканави, 10.230) Найдите функцию $F(x)$, если известно, что $\frac{dF}{dx} = \frac{2}{\sqrt{5-x}}$ и $F(1) = -1$.

А8а.3 () Рассчитайте интеграл $\int_1^2 dx x^3$.

А8а.4 () Рассчитайте интеграл $\int_0^1 dx (x^3 + 4x^2)$.

А8а.5 (Сканави, 10.242) Рассчитайте интеграл $\int_0^2 (1 + 3x)^4 dx$.

А8а.6 (Сканави, 10.245) Рассчитайте интеграл $\int_0^{0,5} \sqrt{1-x} dx$.

А8а.7 (Сканави, 10.252) Рассчитайте интеграл $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3} dx$.

А8а.8 (Сканави, 10.234) Рассчитайте интеграл $\int_{-\pi}^{\pi/2} \sin^2 2x dx$.

А8а.9 (Сканави, 10.259) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 1$ и $x = 2$.

А8а.10 (Сканави, 10.264) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^4$, $y = x$.

9. Натуральный логарифм и экспонента, комплексные числа

А9а.1 (Сканави, 10.172) Найдите точки максимума и минимума функции $y(x) = x - \ln(1+x)$.

А9а.2 (Сканави, 10.137) Составьте уравнение касательной к графику функции $y(x) = x(\ln x - 1)$ в точке с абсциссой $x = e$.

А9а.3 (Сканави, 10.024) Рассчитайте производную функции $y(x) = \log_{10} \frac{10-x}{x+2}$.

А9а.4 (Сканави, 10.168) Найдите точки максимума и минимума функции $y(x) = x^2 e^{-x}$.

А9а.5 (Сканави, 10.102а) Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y(x) = (5-x)2^{-x}$ в промежутке от -1 до 0.

А9а.6 (Сканави, 10.270) Постройте хотя бы одну ненулевую функцию $y(x)$, производная которой равна $\frac{dy}{dx} = -36y$.

А9а.7 (Сканави, 17.020) Выполните действия $\frac{1+3i}{1-3i} + \frac{1-3i}{1+3i}$.

А9а.8 (Сканави, 17.031) Решите в комплексных числах уравнение $x^2 + 6x + 34 = 0$.

А9а.9 (Сканави, 17.057) Решите в комплексных числах уравнение $z^8 = 16$.

А9а.10 (Сканави, 17.104) Проведите возведение в степень $(-1 + i\sqrt{3})^9$.