Московская олимпиада школьников по физике, 2014/15, первый тур, 7-10 классы

Задачи, ответы и критерии оценок

Авторы задач:
Д.Б. Азнауров, Л.И. Арзамасский, С.Д. Варламов, Е.А. Мажник, И.В. Маслов, М.Ю. Ромашка, М.В. Семенов, О.Ю. Шведов, Е.В. Якута

Каждая задача оценивается из 10 очков. Всего участник по 7-9 классам может набрать до 40 очков, по 10 классу - до 50 очков.

- Участник, набравший не менее 31 очков из 40 по 7-9 классам или не менее 41 очка из 50 по 10 классу, считается победителем первого тура.
- Участник, не ставший победителем, но набравший не менее 20 очков из 40 по 7-9 классам или не менее 25 очков из 50 по 10 классу, считается призером первого тура.
- Участник, не ставший победителем или призером, но набравший не менее 10 очков, получает грамоту за успешное выполнение задания первого тура.

Полностью правильное решение задачи оценивается в 10 очков вне зависимости от способа решения. Ответ, данный без решения, не оценивается.

7 класс

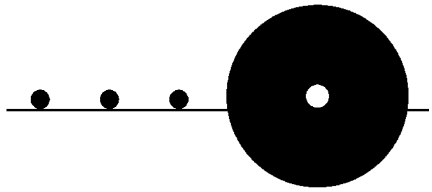
Задача 1. Школьницы Алиса и Василиса участвуют в лыжных гонках. Сразу после старта лыжницам пришлось подниматься в горку. Алиса, скорость которой на подъеме составляла 8 км/ч, отстала от Василисы, поднимавшейся со скоростью 12 км/ч. Спустя километр подъем закончился, и Алиса со скоростью 20 км/ч устремилась в погоню за Василисой, двигавшейся со скоростью 15 км/ч. Какое расстояние надо будет пройти Алисе по горизонтальной лыжной трассе, чтобы догнать Василису?

Возможное решение: Подъем в горку занял у Алисы 1/8 часа, а у Василисы – 1/12 часа. Поэтому в течение времени (1/8) – (1/12) = 1/24 часа Алиса заканчивала подъем в горку, а Василиса в это время уже бежала по горизонтальной трассе. К тому моменту, когда Алиса поднялась на горку, Василиса убежала вперед по горизонтальной лыжне на 15 (1/24) = 5/8 км. При движении по ровной трассе скорость сближения Алисы и Василисы равна 20 – 15 = 5 км/ч. Поэтому Алиса догонит Василису за время (5/8) : 5 = 1/8 часа. За это время Алиса пройдет по трассе расстояние 20·(1/8) = 2,5 км.

Ответ: чтобы догнать Василису, Алисе надо будет пройти по горизонтальной лыжной трассе расстояние 2,5 км.

Критерии оценок: Участник, обоснованно получивший правильный ответ, получает 10 очков. Если решение не доведено до правильного ответа, участник может получить 2 утешительных очка, если хотя бы раз использовал формулу, связывающую скорость, время и расстояние.

Задача 2. Стробоскоп представляет собой диск с небольшим отверстием в центре и механизмом подсветки. В момент, когда подсветка включается на короткий промежуток времени, можно увидеть предмет, находящийся позади отверстия. За стробоскопом на движущейся ленте установлены шарики, расположенные на одинаковом расстоянии 10 см друг от друга. Найдите все возможные скорости ленты, при которых каждый шарик можно наблюдать в отверстие. Частота мигания подсветки – 1 раз за 0,5 с.



Возможное решение: Период мигания подсветки обозначим за τ, расстояние между шариками – за x. Время, за которое следующий шарик доедет до отверстия после того, как некоторый шарик оказался освещенным, может превосходить период мигания в любое целое число раз. Иными словами, пока следующий шар проезжает расстояние $x = 10$ см, подсветка может сработать 1, 2, 3 и так далее раз, то есть $n\tau = x/V$, где V – искомая скорость ленты. Отсюда, с учетом того, что $\tau = 0{,}5$ с, получаем набор возможных скоростей ленты: $V = \dfrac{x}{n\tau} = \dfrac{20}{n}$ см/с, где $n \geq 1$ – целое число.

Ответ: каждый шарик можно наблюдать в отверстие при скоростях ленты V=20/n см/с, $n \geq 1$ – целое число.

Критерии оценок: Участник, обоснованно получивший правильный ответ, получает 10 очков. Если участником в ответе получены не все возможные значения скорости, а только некоторые, он получает 5 очков. Если решение не доведено до правильного ответа, участник может получить 2 утешительных очка, если хотя бы раз использовал формулу, связывающую скорость, время и расстояние.

Задача 3. Часовая стрелка на больших башенных часах в самом широком месте имеет ширину H = 13 футов. От концов отрезка такой ширины на часовой стрелке до оси циферблата часов расстояние равно L = 25 футов. Минутная стрелка на таком же расстоянии от оси циферблата имеет ширину h = 5 футов. Стрелки движутся плавно (без скачков). Определите, за сколько секунд минутная стрелка обгоняет часовую (во время обгона она частично закрывает часовую стрелку). Считается, что обгон начинается в момент, когда минутная стрелка начинает закрывать часовую стрелку в ее самом широком месте, а заканчивается, когда стрелки перестают «перекрываться» в этом месте для наблюдателя, смотрящего на часы издалека.

Для справки: длина окружности радиусом R равна $2\pi R$, где $\pi \approx 3{,}14$.

Возможное решение: Рассмотрим отрезок (часть дуги) шириной H на часовой стрелке и отрезок (часть дуги) шириной h на минутной стрелке. Начало (и конец) каждого из этих отрезков находятся на расстоянии L от оси циферблата. Минутная стрелка совершает один полный оборот за время $T = 1$ час, а часовая – за время $12T$. Поэтому скорость движения рассматриваемого отрезка на минутной стрелке равна $V_{\text{м}} = \dfrac{2\pi L}{T} \approx 157$ футов вчас, а скорость движения рассматриваемого отрезка на часовой стрелке $V_{\text{ч}} = \dfrac{2\pi L}{12T} = \dfrac{\pi L}{6T} \approx 13{,}1$ футов вчас.

Значит, скорость движения минутной стрелки больше скорости движения часовой стрелки на $\Delta V = V_{\text{м}} - V_{\text{ч}} = \dfrac{2\pi L}{T} - \dfrac{\pi L}{6T} = \dfrac{11\pi L}{6T} \approx 143{,}9$ футов вчас.

Для того, чтобы минутная стрелка обогнала часовую, нужно, чтобы начало рассматриваемого отрезка на минутной стрелке прошло ***относительно*** часовой стрелки расстояние $H + h = 18$ футов. Для этого потребуется время

$$t = \frac{H+h}{\Delta V} = \frac{6T(H+h)}{11\pi L} \approx 0{,}125 \text{ часа} = 7{,}5 \text{ минут} = 450 \text{ секунд}.$$

Ответ: минутная стрелка обгоняет часовую за время 0,125 часа = 7,5 минут = 450 с.

Критерии оценок: Участник, обоснованно получивший правильный ответ, получает 10 очков. Если решение не доведено до правильного ответа, участник может получить до 4 утешительных очков по следующим основаниям: хотя бы раз верно использована формула, связывающая скорость, время и расстояние - 1 очко; указано, что минутная стрелка совершает оборот за час - 1 очко; указано, что часовая стрелка совершает оборот за 12 часов - 1 очко; верно найдена скорость движения самого широкого отрезка на часовой или минутной стрелке - 1 очко.

Задача 4. Для строительства дома требуется смесь песка со щебнем и цемента общей массой 28 тонн, содержащая цемент и песок с щебнем в отношении 1:8 (по объёму). На стройке уже имеется 3 тонны песка со щебнем и 3 тонны цемента, а остальные материалы хранятся на складе недалеко от стройплощадки.

1) Сколько тонн песка со щебнем и сколько тонн цемента требуется для строительства дома?

2) Сколько поездок потребуется совершить, чтобы доставить недостающие строительные материалы, если вместимость кузова электрокара, в котором их будут перевозить, составляет 400 л?

Плотность смеси песка со щебнем – 1,6 г/см^3, а цемента – 1,2 г/см^3. За один раз можно перевозить только один вид стройматериалов (иначе они будут смешиваться прямо в кузове в неправильной пропорции).

Возможное решение: Переведем плотности в кг/м^3: плотность смеси песка со щебнем 1600 кг/м^3 , плотность цемента 1200 кг/м^3. Если смешать 1 м^3 цемента и 8 м^3 песка со щебнем, общая масса смеси составит 1200 кг/м^3·1 м^3 + 1600 кг/м^3·8 м^3 = 14000 кг = 14 т. Чтобы получить 28 т смеси заданной пропорции, требуется взять вдвое большее количество веществ: 2 м^3 цемента и 16 м^3 песка со щебнем. Масса цемента составит 1200 кг/м^3·2 м^3 = 2400 кг = 2,4 т, а масса песка 1600 кг/м^3·16 м^3 = 25600 кг = 25,6 т.

Поскольку на стройке уже имеется 3 т цемента, дополнительно цемент перевозить не нужно. За один раз можно перевезти 1600 кг/м^3·0,4 м^3 = 640 кг = 0,64 т песка со щебнем. Поскольку требуется перевезти 25,6 – 3 = 22,6 т песка со щебнем, количество поездок будет равно округленному в большую сторону отношению 22,6 : 0,64 = 35,3 ≈ 36.

Ответ: 1) для строительства дома всего требуется 2,4 т цемента и 25,6 т песка со щебнем; 2) недостающие стройматериалы можно перевезти за 36 поездок.

Критерии оценок: Участник, обоснованно получивший правильный ответ на первый вопрос, получает 7 очков. Если решение не доведено до правильного ответа, участник может получить до +2 утешительных очков, если хотя бы раз верно использовал формулу, связывающую массу, плотность и объем.

Ответ на второй вопрос оценивается только при правильном ответе на первый вопрос. При обоснованном правильном ответе на второй вопрос участник получает еще 3 очка.

8 класс

Задача 1. Школьник Вова в 10 ч. 46 мин. выехал из дома покататься на велосипеде. В 11 ч. 30 мин. из сообщения, полученного на мобильный телефон, он узнал, что пора возвращаться обратно. Проехав вперед еще 900 м, Вова развернулся и приехал домой в 12 ч. 20 мин. Найдите скорость движения Вовы на велосипеде, считая ее постоянной.

Ответ: скорость движения Вовы на велосипеде равна 18 км/ч.

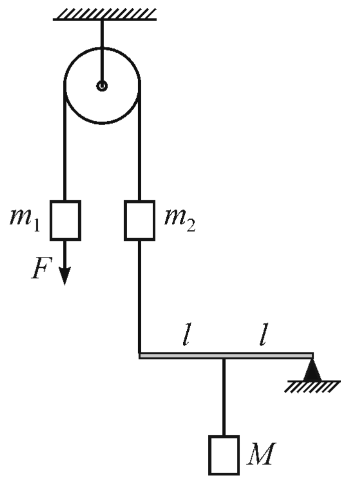
Возможное решение: Обозначим искомую скорость, выраженную в километрах в минуту, за V. Время, прошедшее с момента выезда Вовы из дома до момента получения сообщения, равно $t_1 = 60 - 16 = 44$ минуты. Путь, пройденный за это время, равен $44V$ км. Путь, пройденный от момента получения сообщения до возвращения домой, равен $(44V + 1{,}8)$ км. Этот путь был пройден за время $t_2 = 30 + 20 = 50$ минут. Разделив путь на время, получим скорость. Таким образом, мы имеем следующее уравнение для скорости:

$$V = \frac{44V + 1{,}8}{50}.$$

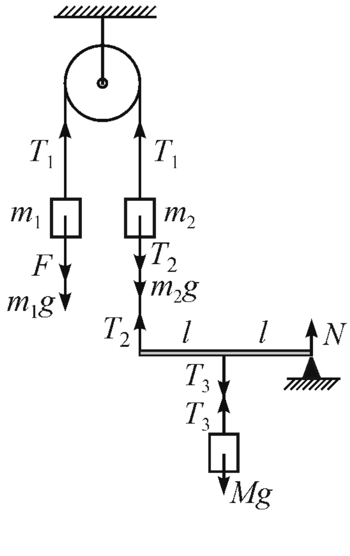
Из этого уравнения находим $V = 0{,}3$ км/мин = 18 км/ч.

Критерии оценок: Участник, обоснованно получивший правильный ответ, получает 10 очков. Если решение не доведено до правильного ответа, участник может получить 2 утешительных очка, если хотя бы раз использовал формулу, связывающую скорость, время и расстояние.

Задача 2. С какой вертикально направленной силой F следует удерживать груз массой m_1 для того, чтобы изображенная на рисунке конструкция из блока, невесомых нитей, легкого стержня и грузов находилась в равновесии? Массы грузов $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $M = 3$ кг. Трения в оси блока нет. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.



Возможное решение: Изобразим на рисунке силы, действующие на грузы и на стержень. На груз m_1 действуют сила тяжести m_1g и сила натяжения T_1 со стороны перекинутой через блок нити. Поскольку трения в оси блока нет, то на груз m_2 со стороны этой же нити действует такая же сила натяжения T_1, а также сила тяжести m_2g и сила натяжения T_2 со стороны нити, соединяющей груз m_2 и левый конец стержня. На левый конец стержня со стороны нити действует сила ее натяжения T_2, на середину стержня – сила натяжения другой нити T_3, а на правый конец стержня – сила реакции опоры N. Поскольку все грузы находятся в равновесии, то для каждого из них сумма приложенных сил равна нулю:



$$m_1g + F = T_1,$$

$$m_2g + T_2 = T_1,$$

$$Mg = T_3.$$

Кроме того, так как стержень находится в равновесии, для него справедливо правило рычага, записанное относительно точки опоры:

$$T_2 \cdot 2l = T_3 l\ .$$

Из записанных уравнений находим:

$$T_2 = Mg/2\,,$$

$$T_1 = m_2 g + \frac{Mg}{2}\,,$$

$$F = T_1 - m_1 g = \left(m_2 - m_1 + \frac{M}{2}\right)g = 25 \text{ Н.}$$

Ответ: груз массой m_1 нужно удерживать, прикладывая к нему вертикально направленную силу F=(m_2-m_1+M/2)g=25 Н.

Критерии оценок: Участник, обоснованно получивший правильный ответ, получает 10 очков. Если решение не доведено до правильного ответа, участник может получить до 4 утешительных очков по следующим основаниям: правильно изображены силы, действующие хотя бы на один из грузов - 1 очко; правильно изображены силы, действующие на стержень - 1 очко; правильно записано хотя бы одно из условий равновесия грузов - 1 очко; верно записано правило рычага - 1 очко.

Задача 3. Кубик из пластилина с длиной ребра 4 см, в котором есть внутренняя полость, держится в жидкости на плаву, погружаясь в нее на 1/24 своего объёма. Если этот пластилиновый кубик смять и снова вылепить из него кубик, но уже без полости, то новый кубик тоже держится на плаву, погружаясь на 8/9 своего объема. Считая, что при плавании верхняя грань кубика без полости горизонтальна, найдите, на сколько миллиметров он выступает из жидкости. Плотность пластилина при лепке не меняется.

Возможное решение: Поскольку при изготовлении кубика без полости не меняется сила тяжести, действующая на пластилин, то и приложенная к нему сила Архимеда, равная по модулю силе тяжести, не изменяется. Это означает, что погруженный в жидкость объём пластилина остается без изменения.

Изначально в жидкость были погружены $4^3/24$ см^3 пластилина, что впоследствии составит 8/9 его полного объёма. Значит, объём пластилинового кубика без полости равен $\frac{4^3/24}{8/9} = 3$ см^3, откуда следует, что длина ребра кубика без полости равна $3^{1/3} \approx 1{,}442$ см.

При плавании кубика без полости над поверхностью жидкости находится 1/9 длины его ребра, что составляет примерно 1,6 мм.

Ответ: кубик без полости выступает над поверхностью жидкости на ≈1,6 мм.

Критерии оценок: Участник, обоснованно получивший правильный ответ, получает 10 очков. Если решение не доведено до правильного ответа, участник может получить до 3 утешительных очков по следующим основаниям: хотя бы раз верно использована формула для объема прямоугольного параллелепипеда (в частности куба) - 1 очко, хотя бы раз верно использована формула, связывающая массу, плотность и объем - 1 очко; хотя бы раз верно использована формула для силы Архимеда - 1 очко.

Задача 4. Туристы развели костёр и поставили кипятиться воду в котелке с плоским дном и вертикальными стенками, заполнив котелок на n = 3/4 его объёма. Когда вода закипела, котелок не сняли с костра и, спустя время t_1 = 10 мин после начала кипения, количество воды в котелке уменьшилось на η_1 = 34%. В этот момент начался дождь, но туристы продолжали поддерживать костёр, поскольку группа людей с продуктами задержалась. За следующие t_2 = 8 мин количество воды в котелке уменьшилось еще на η_2 = 8% от своего первоначального значения. Известно, что пустой котелок, поставленный вертикально на землю, наполнился бы под дождём доверху за время t_3 = 64 мин. Определите температуру дождевых капель до их попадания в котелок. Удельная теплоёмкость воды c = 4200 Дж/(кг·°С), удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}2\cdot10^6$ Дж/кг. Считайте, что подводимая к воде в котелке тепловая мощность всё время поддерживается постоянной. Интенсивность дождя не меняется.

Возможное решение: Пусть начальная температура дождевых капель равна T, тепловая мощность, подводимая к воде от костра, равна P, а масса воды в полностью наполненном котелке равна M. Тогда:

начальная масса воды в котелке равна $nM = 0{,}75M$;

масса выкипевшей воды за время t_1 = 10 мин после начала кипения равна $\eta_1 nM = 0{,}255M$;

уменьшение массы воды в котелке за следующие t_2 = 8 мин равно $\eta_2 nM = 0{,}06M$;

количество дождевой воды, попавшей в котелок за t_2 = 8 мин, равно $\frac{t_2}{t_3}M = 0{,}125M$.

Следовательно, количество воды, испарившейся за t_2 = 8 мин, равно $0{,}125M + 0{,}06M = 0{,}185M$.

С учетом постоянства тепловой мощности, подводимой к воде в котелке, можно составить следующие уравнения теплового баланса:

$$Pt_1 = 0{,}255rM\ ,$$

$$Pt_2 = 0{,}185rM + 0{,}125cM(100 - T)\ .$$

Решая уравнения относительно T, получаем: $T \approx 20{,}4$ °С.

Ответ: температура дождевых капель до их попадания в котелок равна $T \approx 20{,}4$ °С.

Критерии оценок: Участник, обоснованно получивший правильный ответ, получает 10 очков. Если решение не доведено до правильного ответа, участник может получить до 4 утешительных очков по следующим основаниям: найдена масса воды, испарившейся за время t_2 - 1 очко; хотя бы раз верно использована формула, связывающая количество теплоты, мощность и время - 1 очко; хотя бы раз верно использована формула, связывающая количество теплоты, удельную теплоту парообразования и массу - 1 очко; хотя бы раз верно использована формула, связывающая количество теплоты, удельную теплоемкость, массу и изменение температуры - 1 очко.

9 класс

Задача 1. Мячик бросают с начальной скоростью V с поверхности земли под углом α к горизонту. В момент нахождения мячика на максимальной высоте из той же точки на поверхности земли бросают камень под углом β к горизонту. Размеры мячика и камня малы, сопротивлением воздуха можно пренебречь.

1) Определите, с какой начальной скоростью u бросили камень, если он столкнулся с мячиком во время его полета.

2) Найдите время движения камня от момента его броска до момента столкновения с мячиком

Возможное решение: Вертикальная составляющая скорости мячика, равная в начале $V\sin\alpha$, уменьшается до нуля за время $t_0 = V\sin\alpha/g$, где g – ускорение свободного падения. За это время мячик поднимается по вертикали на высоту $H = (V\sin\alpha)^2/(2g)$ и пролетает по горизонтали расстояние $L = V\cos\alpha\cdot t_0 = V^2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha/g$. Заметим, что $L/H = 2\mathrm{ctg}\alpha$.

Введем систему координат, выбрав в качестве начала координат точку броска, направив ось X по горизонтали и ось Y вертикально вверх. В качестве начала отсчета времени выберем момент броска камня. Запишем зависимости координат мячика и камня от времени.

Для мячика: $x = L + V\cos\alpha\cdot t$ и $y = H - gt^2/2$; для камня $x = u\cdot\cos\beta\cdot t$ и $y = u\cdot\sin\beta\cdot t - gt^2/2$.

В момент столкновения должны совпадать как координата x, так и координата y мячика и камня. Следовательно,

$$L + V\cos\alpha\cdot t = u\cdot\cos\beta\cdot t \text{ и } H - gt^2/2 = u\cdot\sin\beta\cdot t - gt^2/2.$$

Отсюда $t = L/(u\cos\beta - V\cos\alpha) = H/(u\sin\beta)$, и

$$u = \frac{V\cos\alpha}{\cos\beta - 2\mathrm{ctg}\alpha\sin\beta}.$$

Для времени движения получим

$$t = \frac{V\sin^2\alpha(\cos\beta - 2\mathrm{ctg}\alpha\sin\beta)}{2g\cos\alpha\sin\beta}.$$

Отметим, что задача имеет решение только при $0 < t < t_0$ (время движения камня должно быть положительно, но меньше, чем время, за которое мяч упадет на землю).

Ответ: начальная скорость камня равна $u = \dfrac{V\cos\alpha}{\cos\beta - 2\mathrm{ctg}\alpha\sin\beta}$, время движения камня от момента его броска до момента столкновения с мячиком равно $t = \dfrac{V\sin^2\alpha(\cos\beta - 2\mathrm{ctg}\alpha\sin\beta)}{2g\cos\alpha\sin\beta}$

.

Критерии оценок: Участник, обоснованно получивший правильный ответ, получает 10 очков. При частично правильном решении участник получает: до +3 очков за исследование движения мяча (по одному очку за указание на постоянную горизонтальную скорость Vcosα, за нахождение высоты подъема мяча в верхней точке траектории, за нахождение пройденного к этому моменту расстоянию по горизонтали); +5 очков за правильную систему уравнений для траекторий камня и мяча (четыре уравнения: зависимость двух координат от времени для камня и для мяча); +1 очко за обоснованный ответ для скорости u, +1 очко за обоснованный ответ для промежутка времени t.

Задача 2. На горизонтальном глинистом дне водоема стоит кубик с длиной ребра a и плотностью ρ. Высота уровня воды над верхней гранью кубика равна H. В начальный момент времени воды под кубиком нет. Вода начинает очень медленно подтекать под кубик. Чему будет равна площадь S части нижней грани, которая останется сухой к моменту, когда кубик начнет всплывать? Плотность воды равна $\rho_в$, кубик легче воды.

Возможное решение: На верхнюю грань кубика действует направленная вниз сила давления воды $\rho_в gHa^2$, на нижнюю – направленная вверх сила давления воды $\rho_в g(H + a)(a^2 - S)$. Здесь g – ускорение свободного падения. Кубик начнет всплывать, когда разность этих сил давления сравняется с силой тяжести $\rho g a^3$, действующей на кубик:

$$\rho_в g(H + a)(a^2 - S) - \rho_в gHa^2 = \rho g a^3.$$

Отсюда

$$S = \frac{(\rho_в - \rho)a^3}{\rho_в(a + H)}.$$

Ответ: площадь части нижней грани, которая останется сухой к моменту, когда кубик начнет всплывать, равна $S = \dfrac{(\rho_в - \rho)a^3}{\rho_в(a + H)}$.

Критерии оценок: Участник, обоснованно получивший правильный ответ, получает 10 очков. При отсутствии верного ответа, но правильном расчете силы, действующей на кубик со стороны воды, участник получает 6 очков. При неправильном расчете силы, действующей на кубик со стороны воды, участник получает не более 2 очков за использование формул для объема кубика и площади грани кубика, соотношения для массы, плотности и объема, соотношения для силы тяжести.

Задача 3. Для изготовления нагревательной спирали кипятильника взяли проволоку длиной l_1. После подключения этого кипятильника к источнику напряжения с малым внутренним сопротивлением на нагревание некоторой массы воды в калориметре на 50 °C было затрачено время $\tau_1 = 2$ минуты. Затем проволоку, из которой была сделана спираль кипятильника, расплавили и изготовили из расплава новую проволоку длиной $l_2 = 2l_1$. Из новой проволоки сделали другую спираль для кипятильника, опустили его в другой калориметр с другим количеством воды, и подключили кипятильник к тому же источнику напряжения. На нагревание воды на 50 °C во втором калориметре было потрачено время $\tau_2 = 12$ минут. Во сколько раз масса воды во втором калориметре отличается от массы воды в первом калориметре? Считайте, что потерь теплоты при нагревании воды не происходит, теплоемкости калориметров пренебрежимо малы, а плотность и проводимость металла после переплавки остаются прежними.

Возможное решение: Запишем уравнение теплового баланса для первого и для второго кипятильников с учетом закона Джоуля-Ленца:

$$\frac{U^2}{R_1}\tau_1 = cm_1\Delta t \quad \text{и} \quad \frac{U^2}{R_2}\tau_2 = cm_2\Delta t .$$

Здесь m_1 и m_2 – массы воды в первом и во втором калориметрах, Δt – изменение температуры воды в калориметрах, U – напряжение источника, R_1 и R_2 – сопротивления спиралей кипятильников в первом и во втором случаях, c – удельная теплоемкость воды.

Разделив второе уравнение на первое, выразим отношение масс воды во втором и в первом калориметрах:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\tau_2}{\tau_1}\frac{R_1}{R_2} .$$

Сопротивления кипятильников равны $R_1 = \rho\frac{l_1}{S_1}$ и $R_2 = \rho\frac{l_2}{S_2}$, где ρ – удельное сопротивление материала проволоки.

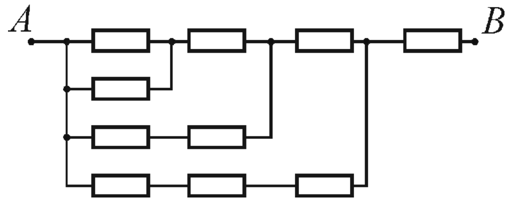
Согласно условию задачи, плотность металла после переплавки не меняется. Поэтому объем проводника остается неизменным, то есть $l_1S_1 = l_2S_2$.

С учетом этого соотношения получаем, что отношение масс воды во втором и первом калориметрах равно:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\tau_2}{\tau_1}\frac{R_1}{R_2} = \frac{\tau_2}{\tau_1}\frac{\rho l_1 S_2}{S_1 \rho l_2} = \frac{\tau_2}{\tau_1}\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 = \frac{\tau_2}{4\tau_1} = 1{,}5 .$$

Ответ: массы воды в калориметрах отличаются в $\frac{m_2}{m_1} = \frac{\tau_2}{\tau_1}\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 = \frac{\tau_2}{4\tau_1} = 1{,}5$ раза.

Критерии оценок: Участник, обоснованно получивший правильный ответ, получает 10 очков. Если получен верный ответ в виде формулы, но числовые значения подставлены неверно, участник получает 9 очков. При отсутствии верного ответа участник может получить до 7 очков за следующие пункты: +2 очка за использование формулы, связывающей сопротивление, удельное сопротивление, длину и площадь поперечного сечения проводника; +2 очка, если показано, что $R_2=4R_1$; +1 очко за использование формулы, связывающей выделяемую на резисторе мощность с напряжением на резисторе и сопротивлением резистора; +1 очко за использование формулы, связывающей количество теплоты, удельную теплоемкость, массу и изменение температуры; +1 очко за использование формулы, связывающей мощность, энергию и время.



Задача 4. Участок AB электрической цепи, схема которого показана на рисунке, состоит из одинаковых резисторов и проводов, сопротивление которых пренебрежимо мало. Сопротивление этого участка цепи равно R_1 = 730 Ом. После того, как школьник Вася перерезал один из проводов, сопротивление участка AB стало равным R_2 = 1360 Ом. В каких точках Вася мог перерезать провод? Укажите две такие точки. Ответ обоснуйте.

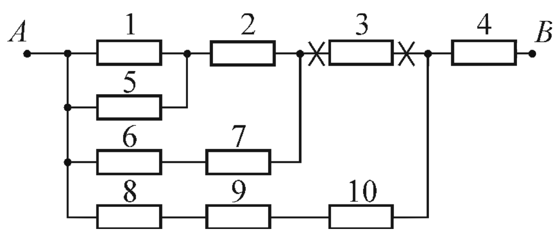
Возможное решение: Рассмотрим участок AB электричкой цепи. Заметим, что он состоит из набора последовательно и параллельно соединённых звеньев.

Пронумеруем резисторы слева направо, начиная с верхнего ряда, так, как показано на рисунке. Обозначим сопротивление каждого из резисторов, из которых состоит участок цепи, через R, и выразим через R общее сопротивление этого участка цепи. Будем двигаться вдоль него слева направо.

Резисторы №1 и №5 соединены параллельно, их общее сопротивление равно $R/2$. Затем последовательно к ним подсоединен резистор №2, что дает общее сопротивление $3R/2$. Далее к ним параллельно подключены два последовательно соединенных резистора № 6 и №7, с их учетом сопротивление равно $\frac{(3R/2)\cdot 2R}{(3R/2)+2R}=\frac{6R}{7}$. Добавляя последовательно соединенный резистор №3, получим сопротивление $13R/7$. Далее параллельно к полученному участку подсоединяются три последовательно включенных резистора №8, №9 и №10, что дает сопротивление $\frac{(13R/7)\cdot 3R}{(13R/7)+3R}=\frac{39R}{34}$. Наконец, путем последовательного подключения резистора №4 получим сопротивление всего участка цепи,: $R_{AB}=\frac{39R}{34}+R=\frac{73R}{34}=R_1$ (согласно условию, оно равно R_1 = 730 Ом). Отсюда R = 340 Ом.

Вычислим отношение $\frac{R_2}{R}=\frac{1360}{340}=4$. Такой результат означает, что цепь, полученная в результате перерезания провода, эквивалентна четырем последовательно соединенным резисторам. Можно заметить, что резисторы №8, №9, №10 и №4 окажутся соединенными нужным образом, если изолировать одним отрезом все остальные резисторы цепи. Следовательно, Вася мог перерезать провод возле резистора №3 с любой из сторон от него (соответствующие места показаны на рисунке крестиками).

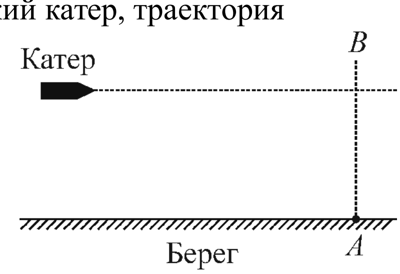
Ответ: Вася мог перерезать провод возле резистора №3 с любой из сторон от него (соответствующие места показаны на рисунке крестиками).



Критерии оценок: Участник, обоснованно получивший правильный ответ (указавший любой из способов перерезания провода и доказавший, что сопротивление равно требуемому значению), получает 10 очков. Если, наряду с правильным, указан неправильный способ перерезания провода, то участник получает 6 очков. Участник, не получивший правильный ответ, может получить до 3 утешительных очков по следующим основаниям: хотя бы раз верно использована формула для последовательного или параллельного соединения проводников - 1 очко; найдено сопротивление одного резистора - 2 очка.

10 класс

Задача 1. По спокойной поверхности озера плывёт маленький катер, траектория которого параллельна прямой линии берега и лежит от него на расстоянии L. Стоящий в точке A наблюдатель увидел, что первая волна от катера достигла точки A спустя время t после того, как катер пересёк прямую AB, перпендикулярную берегу (см. рис). После этого волны ударяли о берег в этом месте с периодом T. Расстояние между соседними гребнями волн равно λ. Найдите скорость катера.



Возможное решение: Пусть v – скорость катера, а u – скорость распространения волн относительно воды. Запишем формулу для скорости волн:

$$u = \lambda / T \; . \qquad (1)$$

Перейдём в систему отсчёта, связанную с катером (рис. 1).

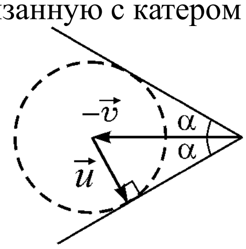


Рис. 1.

В этой системе отсчета вода движется относительно катера со скоростью $-\vec{v}$, а волны распространяются относительно воды из каждой точки, в которой находился катер, во всех направлениях со скоростью, по модулю равной u (иначе говоря, гребни волн, испущенных в некоторый момент, в следующие моменты времени находятся на одинаковом расстоянии от точки испускания, которая движется со скоростью v). Из закона сложения скоростей следует, что относительно катера волны распространяются только внутри угла 2α, изображённого на рис. 1 (это так называемый «конуса Маха»; в трёхмерном случае волны распространяются внутри конуса). Относительно берега озера «конус Маха» как единое целое движется со скоростью , и поэтому гребни волн образуют с берегом тот же угол α, что изображён на рис. 1. Из условия задачи следует, что $u < v$ (иначе волны обгоняли бы катер, и первая волна пришла бы в точку A до того, как катер пересек линию AB).

Рассмотрим рис. 2, на котором показан гребень волны AD и набор параллельных ему гребней следующих волн.

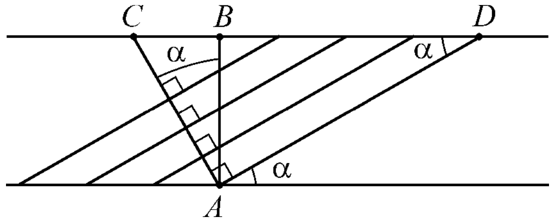


Рис. 2.

В точку A дошла волна, испущенная из точки C, а катер за это время прошёл отрезок CD. Из рис. 1 и рис. 2 следуют уравнения:

$$\sin\alpha = \frac{u}{v}, \qquad (2)$$

$$L = BD \cdot \mathrm{tg}\alpha = vt \cdot \mathrm{tg}\alpha . \qquad (3)$$

Из уравнений (2) и (3) получаем:

$$\cos\alpha = \frac{ut}{L}, \qquad \sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{ut}{L}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{\lambda t}{TL}\right)^2} .$$

Подставляя это выражение в уравнение (2), получим:

$$v = \frac{\lambda}{\sqrt{T^2 - \left(\frac{\lambda t}{L}\right)^2}} .$$

Ответ: скорость катера равна $v = \dfrac{\lambda}{\sqrt{T^2 - \left(\frac{\lambda t}{L}\right)^2}}$.

Критерии оценок: Участник, обоснованно получивший правильный ответ, получает 10 очков. Если решение не доведено до правильно ответа, участник может получить до 5 утешительных очков по следующим основаниям: верно записано соотношение, связывающее скорость волны, длину волны и период Т - 1 очко; правильно найден угол между направлением распространения волны и берегом - 4 очка.

Задача 2. В вертикальной плоскости закреплено круглое кольцо радиусом R, на которое в верхней точке надета бусинка массой m. После небольшого толчка бусинка начинает соскальзывать вниз по кольцу под действием силы тяжести. Всеми силами трения можно пренебречь.

1) С какой силой бусинка давит на кольцо в точке, лежащей на его горизонтальном диаметре?

2) Чему равен модуль импульса бусинки в момент, когда она не давит на кольцо?

Возможное решение: 1). По закону сохранения механической энергии потенциальная энергия бусинки, отсчитанная от уровня центра кольца, полностью переходит в ее кинетическую энергию на том же уровне: $mgR = mv^2/2$. Таким образом, бусинка на уровне горизонтального диаметра кольца движется со скоростью $v = \sqrt{2gR}$ по окружности радиусом R, обладая при этом центростремительным ускорением

$$a_{\text{цс}} = \frac{v^2}{R} = 2g .$$

Запишем для этого момента уравнение движения бусинки, на которую со стороны кольца действует сила нормального давления $\vec{N}$, направленная вдоль радиуса к центру кольца. Эта сила, согласно третьему закону Ньютона, равна по модулю и противоположно направлена искомой силе $\vec{F}$ давления бусинки на кольцо:

$$N = F = ma_{\text{цс}} = m\frac{v^2}{R} = 2mg,$$

при этом сила $\vec{F}$ направлена по радиусу от центра кольца.

2). В момент, когда бусинка не давит на кольцо, ее центростремительное ускорение при движении по окружности $a_{\text{цс}} = \frac{v_0^2}{R}$ обеспечивается только проекцией силы тяжести на радиус кольца:

$$ma_{\text{цс}} = m\frac{v_0^2}{R} = mg\cos\alpha$$

($\alpha < \pi/2$ – угол между вертикалью и радиусом, проведенным из центра кольца к бусинке в рассматриваемый момент времени). При этом скорость V_0 бусинки по-прежнему определяется из закона сохранения механической энергии:

$$mgR(1-\cos\alpha) = mv_0^2/2.$$

Приравнивая выражения для v_0^2, полученные из двух последних уравнений, получаем: $\cos\alpha = 2/3$, и далее из первого уравнения $v_0 = \sqrt{\frac{2}{3}gR}$.

Таким образом, модуль импульса бусинки в момент, когда она не давит на кольцо, равен $p_0 = mv_0 = m\sqrt{\frac{2}{3}gR}$.

Ответ: сила давления бусинки на кольцо в точке, лежащей на его горизонтальном диаметре, равна $F = 2mg$ и направлена по радиусу от центра кольца;

2) модуль импульса бусинки в момент, когда она не давит на кольцо, равен $p_0 = m\sqrt{\frac{2}{3}gR}$.

Критерии оценок: Участник, обоснованно получивший правильный ответ на первый вопрос, получает 5 очков. Участник, обоснованно получивший правильный ответ на второй вопрос, получает 5 очков. Если участник не получил правильный ответ ни на один из вопросов, он может получить до 3 утешительных очков по следующим основаниям: хотя бы раз верно записан закон сохранения энергии - 1 очко; хотя бы раз верно записана формула для центростремительного ускорения - 1 очко; хотя бы раз верно записан второй закон Ньютона - 1 очко.

Задача 3. На водопроводном смесителе установлены два крана – холодный и горячий. Краны одинаковы по своей конструкции – она такова, что количество воды, протекающее через каждый кран за одну секунду, пропорционально углу поворота крана при его открывании. Если повернуть холодный кран на угол $\alpha_1 = 180°$, а горячий кран – на угол $\beta_1 = 60°$, из крана потечёт вода температурой $t_1 = 36$ °C. Если же повернуть холодный кран на угол $\alpha_2 = 120°$, а горячий кран – на угол $\beta_2 = 90°$, то из крана потечёт вода температурой $t_2 = 48$ °C. Найдите температуру воды, текущей из крана, когда холодный кран повёрнут на угол $\alpha_3 = 160°$, а горячий кран повёрнут на угол $\beta_3 = 80°$. Потерями теплоты в смесителе пренебречь.

Возможное решение: Пусть температура воды в холодной трубе равна T_1, а температура воды в горячей трубе равна T_2. Найдём температуру T воды, текущей из крана, когда холодный кран повёрнут на угол α, а горячий кран повёрнут на угол β. За одну секунду из холодного крана вытекает вода массой $k\alpha$, а из горячего – вода массой $k\beta$, где k – коэффициент пропорциональности (он один и тот же для обоих кранов, поскольку конструкция кранов одинакова). При смешивании холодная вода получает столько же теплоты, сколько горячая вода отдаёт. Запишем уравнение теплового баланса:

$$ck\alpha(T - T_1) = ck\beta(T_2 - T)$$

где c – удельная теплоёмкость воды. Из этого уравнения находим:

$$T = \frac{\alpha T_1 + \beta T_2}{\alpha + \beta}.$$

Применим полученную формулу для того, чтобы найти температуры воды в холодной и в горячей трубе. Из условия задачи имеем систему уравнений:

$$t_1 = \frac{\alpha_1 T_1 + \beta_1 T_2}{\alpha_1 + \beta_1}, \qquad t_2 = \frac{\alpha_2 T_1 + \beta_2 T_2}{\alpha_2 + \beta_2}.$$

Подставляя числа в систему и решая её, получаем: T_1 = 19,2 °C, T_2 = 86,4 °C.

Теперь можно легко определить искомую температуру t:

$$t = \frac{\alpha_3 T_1 + \beta_3 T_2}{\alpha_3 + \beta_3} = 41{,}6\ °\text{C}.$$

Ответ: когда холодный кран повёрнут на угол $\alpha_3 = 160°$, а горячий кран повёрнут на угол $\beta_3 = 80°$ из крана течет вода температурой 41,6 °C.

Критерии оценок: Участник, обоснованно получивший правильный ответ, получает 10 очков. Если участник не получил правильный ответ, он может получить до 4 утешительных очков по следующим основаниям: указано, что расход воды пропорционален углу поворота крана - 1 очко; записана формула для температуры смеси в зависимости от углов - 3 очка.

Задача 4. В нижней части вертикального цилиндрического сосуда, разделенного подвижным легким поршнем, находится аргон. Верхняя часть сосуда полностью заполнена водой массой m = 1 кг и открыта в атмосферу. При температуре t_1 = 27 °C поршень расположен на высоте, составляющей 1/4 высоты сосуда. После нагревания всей системы до температуры t_2 = 127 °C равновесие достигается при расположении поршня на 1/2 высоты сосуда. Найдите площадь S поперечного сечения сосуда и высоту H сосуда. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Абсолютный нуль считайте равным t_0 = –273 °C, плотность воды ρ = 1000 кг/м^3, ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

Возможное решение: Переведем температуры в Кельвины: начальная температура составляет T_1 = 300 К, конечная равна T_2 = 400 К. Обозначим количество аргона в нижней части сосуда через ν.

Начальное давление аргона равно $p_0 + (mg/S)$, объем равен $SH/4$; из уравнения состояния идеального газа получаем: $\left(p_0 + \frac{mg}{S}\right)\frac{SH}{4} = \nu R T_1$, где R – универсальная газовая постоянная.

В конце процесса вся вода превращается в пар, который улетучивается, поэтому давление аргона становится равным p_0. Объем аргона становится равным $SH/2$, и согласно уравнению состояния идеального газа: $p_0 \cdot (SH/2) = \nu R T_2$.

Разделив первое уравнение на второе, получим: $p_0 + \frac{mg}{S} = \frac{2T_1}{T_2} \cdot p_0$, откуда

$$S = \frac{mg}{p_0\left(2\frac{T_1}{T_2}-1\right)} = 2\cdot10^{-4} \text{ м}^2 = 2 \text{ см}^2.$$

Поскольку вначале вода массой m занимала объем $3SH/4$, имеем: $m = \rho\cdot3SH/4$. Отсюда

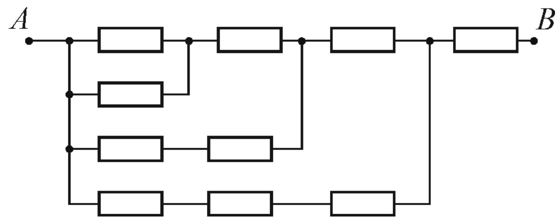
$$H = \frac{4m}{3\rho S} = \frac{4p_0}{3\rho g}\left(2\frac{T_1}{T_2}-1\right) \approx 6{,}7 \text{ м}.$$

Ответ: площадь поперечного сечения сосуда $S = \frac{mg}{p_0\left(2\frac{T_1}{T_2}-1\right)} = 2\cdot10^{-4}$ м^2 = 2 см^2,

высота сосуда $H = \frac{4p_0}{3\rho g}\left(2\frac{T_1}{T_2}-1\right) \approx 6{,}7$ м.

Критерии оценок: Участник, обоснованно получивший правильный ответ на вопрос о площади, получает 5 очков. Участник, обоснованно получивший правильный ответ на вопрос о высоте сосуда, получает 5 очков. Если участник не получил правильный ответ ни на один из вопросов, он может получить до 4 утешительных очков по следующим основаниям: градусы Цельсия верно переведены в кельвины - 1 очко; сказано, что давление груза на поршень равно mg/S - 1 очко; отмечено, что в конце вода превращается в пар, который улетучивается - 1 очко; верно записано уравнение идеального газа - 1 очко.

Задача 5. Участок *AB* электрической цепи, схема которого показана на рисунке, состоит из одинаковых резисторов и проводов, сопротивление которых пренебрежимо мало. Сопротивление этого участка цепи равно R_1 = 219 Ом. После того, как школьник Вася перерезал один из проводов, сопротивление участка *AB* стало равным R_2 = 255 Ом. В каких точках Вася мог перерезать провод? Укажите две такие точки. Ответ обоснуйте.



Возможное решение: Рассмотрим участок *AB* электричкой цепи. Заметим, что он состоит из набора последовательно и параллельно соединённых звеньев.

Пронумеруем резисторы слева направо, начиная с верхнего ряда, так, как показано на рисунке. Обозначим сопротивление каждого из резисторов, из которых состоит участок цепи, через R, и выразим общее сопротивление через R. Будем двигаться вдоль участка цепи слева направо.

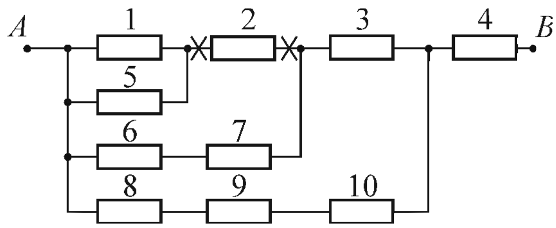
Резисторы №1 и №5 соединены параллельно, их общее сопротивление равно $R/2$. Затем последовательно к ним подсоединен резистор №2, что дает общее сопротивление $3R/2$. Далее к ним параллельно подключены два последовательно соединенных резистора № 6 и №7, с их учетом сопротивление равно $\frac{(3R/2)\cdot 2R}{(3R/2)+2R} = \frac{6R}{7}$. Добавляя последовательно соединенный резистор №3, получим сопротивление $13R/7$. Далее параллельно к полученному участку параллельно подсоединяются три последовательно включенных резистора №8, №9 и №10, что дает сопротивление $\frac{(13R/7)\cdot 3R}{(13R/7)+3R} = \frac{39R}{34}$. Наконец, путем последовательного подключения резистора №4, получим сопротивление всего участка цепи,:

$R_{AB} = \frac{39R}{34} + R = \frac{73R}{34} = R_1$ (согласно условию, оно равно R_1 = 219 Ом). Отсюда R = 102 Ом.

Вычислим отношение $\frac{R_2}{R} = \frac{255}{102} = \frac{5}{2}$. Заметим, что резистор №4 добавляет к общему сопротивлению участка AB сопротивление R. Если этот резистор мысленно удалить, то сопротивление оставшегося участка цепи будет превышать R в $\frac{R_2 - R}{R} = \frac{3}{2}$ раз. Следовательно, участок цепи, который остается после мысленного удаления резистора №4, после перерезания одного провода может состоять, например, из двух параллельно соединенных ветвей, каждая из которых содержит три последовательно включенных резистора. Обратим внимание на параллельные ветви цепи с резисторами №6, №7, №3 и №8, №9, №10. Сопротивление этих двух ветвей без резисторов №1, №2 и №5 равно как раз ($3R/2$).

Таким образом, для удовлетворения условию задачи нужно исключить резисторы №1, №2 и №5 путем перерезания одного провода. Следовательно, Вася мог перерезать провод возле резистора №2 с любой из сторон от него (соответствующие места показаны на рисунке крестиками).

Ответ: Вася мог перерезать провод возле резистора №2 с любой из сторон от него (соответствующие места показаны на рисунке крестиками).



Критерии оценок: Участник, обоснованно получивший правильный ответ (указавший любой из способов перерезания провода и доказавший, что сопротивление равно требуемому значению), получает 10 очков. Если, наряду с правильным, указан неправильный способ перерезания провода, то участник получает 6 очков. Участник, не получивший правильный ответ, может получить до 3 утешительных очков по следующим основаниям: хотя бы раз верно использована формула для последовательного или параллельного соединения проводников - 1 очко; найдено сопротивление одного резистора - 2 очка.