Московская олимпиада школьников по физике, 2014/15, второй тур, 7-10 классы

Задачи, ответы и критерии оценок

Авторы задач:
С.Д. Варламов, Е.А. Вишнякова, А. Коваленко, Е.А. Мажник, И.В. Маслов,
М.Ю. Ромашка, А.В. Фролов, Д.Э. Харабадзе, А.А. Якута

Каждая задача оценивается из 10 баллов. Всего участник по 7-9 классам может набрать до 40 баллов, по 10 классу - до 50 баллов. Полностью правильное решение задачи оценивается в 10 очков вне зависимости от способа решения. Ответ, данный без решения, не оценивается.

7 класс

Задача 1. Тренер проводит занятия по физкультуре необычным способом. Сам он начинает идти по кругу стадиона с постоянной скоростью u = 1 м/с. За тренером в тот же момент по кругу стадиона начинает бежать его ученик, который все время движется с постоянной скоростью V = 3 м/с. Когда он достигает тренера, ученик быстро разворачивается, возвращается обратно, добирается до старта, снова быстро разворачивается, опять бежит до тренера, и далее повторяет эти действия нужное число раз. В конечном итоге тренер и ученик пришли к финишу одновременно, причем тренер прошел менее одного круга.

1) Какой путь S_1 пробежал ученик к моменту первой встречи с тренером?

2) Какой путь S пробежал ученик до момента финиша?

Длина окружности стадиона от старта до финиша равна L = 400 м. В момент старта ученика и тренера длина дуги окружности между ними была равна D = 100 м. Ученик начинает бежать с линии старта, которая совпадает с линией финиша.

Возможное решение: 1) Когда ученик догоняет тренера, он приближается к нему со скоростью $V - u$. Поэтому первая встреча ученика стренером произошла через время $t_1 = \dfrac{D}{V-u}$. За это время ученик пробежал путь $S_1 = Vt_1 = \dfrac{VD}{V-u} = \dfrac{3\cdot 100}{3-1} = 150$ м.

2) Тренер дошел до линии финиша за время $t_2 = \dfrac{L-D}{u}$. Поскольку ученик добежал до финиша за это же время (он пришел к финишу одновременно с тренером), то путь, пройденный учеником от старта до финиша, равен $S = Vt_2 = \dfrac{V(L-D)}{u} = \dfrac{3\cdot(400-100)}{1} = 900$ м.

Ответ: 1) ученик к моменту первой встречи с тренером побежал путь $S_1 = \dfrac{VD}{V-u} = 150$ м;

2) ученик до момента финиша пробежал путь $S = \dfrac{V(L-D)}{u} = 900$ м.

Критерии оценок: Участник, давший обоснованный правильный ответ на оба вопроса, получает 10 баллов, давший обоснованный правильный ответ на один вопрос - 5 баллов. Если решение не доведено ни до одного правильного ответа, участник может получить 2 утешительных балла, если хотя бы раз использовал формулу, связывающую скорость, время и расстояние.

Задача 2. Школьник Николай проводит опыт по наполнению сосуда водой. Когда Николай открыл кран с горячей водой, электронные часы показывали 07:03. Когда сосуд заполнился на четверть (часы показывали 07:10), Николай дополнительно открыл кран с холодной водой. Когда сосуд заполнился до половины (на часах было 07:13), Николай закрыл кран с горячей водой. Каким может быть показание часов, когда сосуд заполнится полностью? При решении учитывайте, что часы показывают, например, время 07:03 в моменты времени от 7 ч 03 мин. 00 с до 7 ч 03 мин. 59,9999... с, а затем показание часов скачком изменяется на 07:04. Открывание и закрывание кранов производится очень быстро.

Возможное решение: Заметим, что любое из описываемых в условии задачи событий (открывание или закрывание крана с горячей или с холодной водой) происходило в течение той минуты, которую показывали часы в момент, когда происходило это событие. Обозначим моменты времени, в которые на самом деле произошли события, следующим образом: a – момент открывания горячего крана, b – момент открывания холодного крана, c – момент закрывания горячего крана, t – момент заполнения сосуда. При приведённых в условии задачи данных, мы имеем следующие ограничения на эти величины: a – от 07:03 до 07:04, b – от 07:10 до 07:11, c – от 07:13 до 07:14.

Заметим, что в течение промежутка времени $b-a$ был открыт только горячий кран, в течение промежутка времени $c-b$ были открыты оба крана, а в течение промежутка $t-c$ был открыт только холодный кран. Пусть V – объем одной четвертой части сосуда (например, в литрах). Тогда скорость вытекания из крана горячей воды (выраженная в л/с) равна $\frac{V}{b-a}$, а скорость вытекания из крана холодной воды равна $\frac{2V}{t-c}$. Когда открыты оба крана, то скорость наполнения сосуда равна суммарной скорости наполнения сосуда из отдельных кранов. Поэтому можно составить уравнение:

$$\frac{V}{c-b}=\frac{V}{b-a}+\frac{2V}{t-c}.$$

Отсюда

$$t=c+\frac{2}{\frac{1}{c-b}-\frac{1}{b-a}}.$$

Рассмотрим случай, когда c и a принимают максимально возможные значения, а b – минимально возможное значение. Тогда обе дроби, находящиеся в знаменателе «большой» дроби, будут минимальны, а сама «большая» дробь – максимальна. При сложении с максимальным значением c, получается максимально возможное значение t, равное

$$t_{\max}=(07:14)+\frac{2}{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}=(07:14)+(0:24)=07:38.$$

Для получения минимально возможного значения времени t, наоборот, нужно взять максимально возможное значение b и минимально возможные значения c и a:

$$t_{\min}=(07:13)+\frac{2}{\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}=(07:13)+\frac{16}{3}=07:18 \text{ и 20 секунд,}$$

что соответствует показаниям часов 07:18.

Ответ: в момент заполнения сосуда часы могут показывать любое время от 07:18 до 07:38.

Критерии оценок: Участник, давший обоснованный правильный ответ, получает 10 баллов. Если участник получил формулу для t, но не проанализовал или неправильно проанализировал неравенства, он получает 6 баллов. Если участник не получил общую формулу для t, но обоснованно получил какое-то одно значение из интервала от 7:18 до 7:38, он получает 3 балла. Если ни для одного из случаев участник не довел решение до верного ответа, он может получить до 2 утешительных баллов: использована формулы для расхода воды в единицу времени, времени и объема - 1 балл; отмечено, что расходы воды при открытии двух кранов складываются - 1 балл.

Задача 3. Вася наполнил две одинаковые легкие пластиковые бутылки емкостью 1 литр кварцевым песком по самое горлышко, и взвесил их. Получились одинаковые массы 1530 г. Затем Вася аккуратно пересыпал песок из одной бутылки в пакет, заполнил бутылку наполовину водой и медленно высыпал весь песок из пакета обратно в эту бутылку, которая снова оказалась заполненной по самое горлышко смесью песка с водой. Весы показали массу бутылки 1866 г. Какова плотность кварца?

Возможное решение: Поскольку масса бутылки с песком увеличилась за счет воды не на 500 г, а только на 1866 – 1530 = 336 г, то часть воды из бутылки, очевидно, вытекла.

Объем оставшейся в бутылке воды равен (336 г)/(1 г/см^3) = 336 см^3, объем песка 1000 – 336 = 664 см^3, а его масса, поскольку бутылка легкая, равна 1530 г.
Таким образом, плотность кварца равна 1530/664 ≈ 2,30 г/см^3.

Ответ: Плотность кварца равна 2,30 г/см^3.

Критерии оценок: Участник, давший обоснованный правильный ответ, получает 10 баллов. Если решение не доведено до правильного ответа, участник может получить до 3 утешительных баллов по следующим основаниям: хотя бы раз верно использована формула, связывающая массу, плотность и объем - 1 балл; отмечено, что часть воды из бутылки вытекла - 1 балл; найден объем оставшейся в бутылке воды или объем песка - 1 балл.

Задача 4. В 1802 году Ж. Гей-Люссак, исследуя тепловое расширение воздуха, обнаружил, что объем порции воздуха при атмосферном давлении линейно зависит от температуры, измеряемой в градусах Цельсия: график зависимости объема от температуры является прямой линией. При этом объемы воздуха при температурах 100 ºС и 0 ºС относятся примерно как 11 : 8.

1) Запишите формулу, выражающую плотность ρ воздуха при температуре t через плотность воздуха ρ_0 при 0 ºС и температуру t (выраженную в градусах Цельсия).

2) Определите отношение плотности воздуха при температуре 10 ºС к плотности воздуха при температуре 20 ºС.

3) Считая плотность воздуха при 0 ºС равной ρ_0 = 1,3 кг/м^3, рассчитайте, как и на сколько изменится масса воздуха в помещении объемом 40 м^3 при уменьшении температуры от 20 ºС до 10 ºС.

Возможное решение: Обозначим массу воздуха через m, а объем воздуха – через V_t, где индекс t соответствует температуре, измеряемой в градусах Цельсия. По условию связь V_t и t – линейная: $V_t = V_0 + kt$, где k – постоянный коэффициент.

1) Из условия имеем: $\dfrac{V_{100}}{V_0} = \dfrac{V_0 + k\cdot 100}{V_0} = \dfrac{11}{8}$, откуда $100k = \dfrac{3}{8}V_0$, и $V_t = V_0\left(1 + \dfrac{3}{800}t\right)$.

Плотность воздуха при температуре t равна, таким образом,

$$\rho_t = \frac{m}{V_t} = \frac{m}{V_0\left(1+\dfrac{3}{800}t\right)} = \frac{\rho_0}{1+\dfrac{3}{800}t}.$$

2) Отношение плотностей воздуха при 10 ºС и при 20 ºС равно

$$\frac{\rho_{10}}{\rho_{20}}=\frac{1+\frac{3}{800}\cdot 20}{1+\frac{3}{800}\cdot 10}=\frac{86}{83}\approx 1{,}036\,.$$

3) Поскольку масса воздуха в помещении объемом V при температуре t равна $m_t=\rho_t V=\frac{\rho_0 V}{1+\frac{3}{800}t}$, то при понижении температуры от t_1 = 20 ºC до t_2 = 10 ºC масса воздуха в комнате увеличится. Изменение массы воздуха составит

$$\Delta m=m_{10}-m_{20}=\rho_0 V\left(\frac{1}{1+\frac{3}{800}t_2}-\frac{1}{1+\frac{3}{800}t_1}\right)=$$

$$=1{,}3\cdot 40\left(\frac{1}{1+\frac{3}{800}\cdot 10}-\frac{1}{1+\frac{3}{800}\cdot 20}\right)=52\cdot\left(\frac{80}{83}-\frac{40}{43}\right)\approx 1{,}75\text{ кг.}$$

Ответ: 1) зависимость плотности воздуха от температуры, выраженной в градусах Цельсия, дается формулой $\rho_t=\frac{\rho_0}{1+\frac{3}{800}t}$; 2) отношение плотностей воздуха при температурах 10 ºC и 20 ºC равно $\frac{\rho_{10}}{\rho_{20}}=\frac{86}{83}\approx 1{,}036$; 3) масса воздуха в помещении увеличится на $\Delta m\approx 1{,}75$ кг .

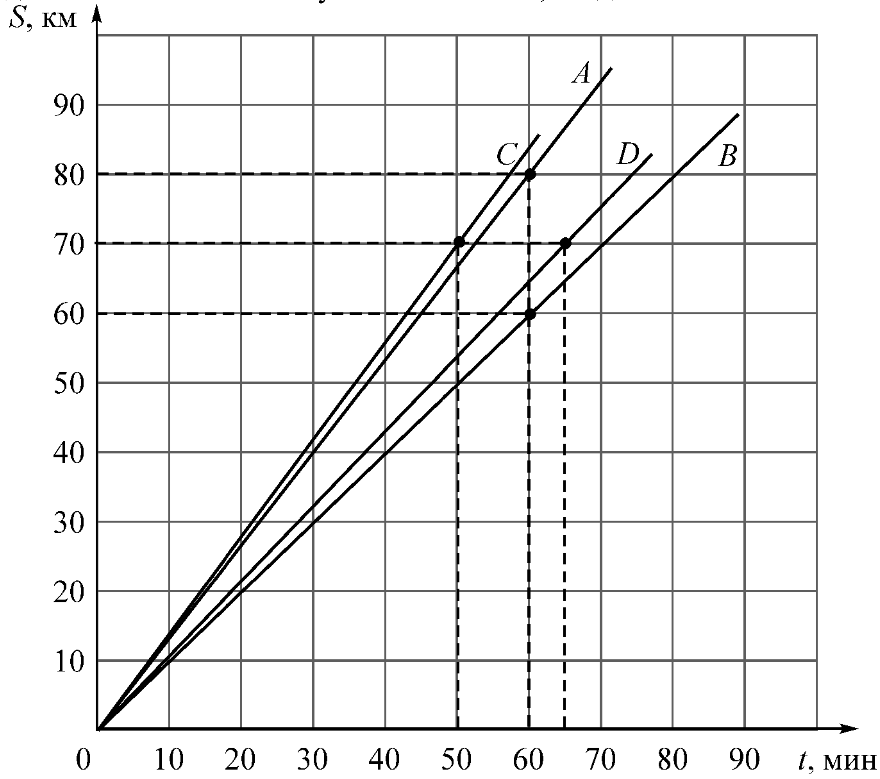
Критерии оценок: Участник, давший обоснованный правильный ответ на первый вопрос, получает 6 баллов. Если решение не доведено до правильного ответа на первый вопрос, участник может получить до 2 утешительных баллов по основаниям: записан вид линейной зависимости объема от температуры - 1 балл, использована формула для массы, плотности и объема - 1 балл.
При обоснованном правильном ответе на первый вопрос, за который стоит 6 баллов, проверяются ответы на второй и третий вопросы: за обоснованный правильный ответ на каждый из вопросов участник получает 2 балла.

8 класс

Задача 1. Автомобилист торопится на встречу с мотоциклистом. Они заранее договорились, что встретятся ровно в полдень в определенном месте между 60-м и 80-м километрами автодороги, в начале (на нулевом километре) которой находится автомобилист. Известно, что железнодорожные пути на 70-м километре дороги можно пересекать только с 11:50 до 12:05, а в остальное время переезд закрыт. Автомобилист утверждает, что, начав движение в 11:00, он двигался по дороге с постоянной скоростью, был в назначенном месте встречи вовремя, но, не застав там мотоциклиста, не останавливаясь, продолжил движение с той же скоростью и доехал до своего дома, который находится на 100-м километре дороги. По словам автомобилиста, на железнодорожном переезде он тоже не останавливался. С какой скоростью мог двигаться автомобилист?

Возможное решение: Эту задачу проще всего решить графически. Введем оси для построения графиков зависимости пути S, пройденного автомобилистом, от времени t (см.

рис.). Время будем отсчитывать в минутах от момента, когда автомобилист начал движение.

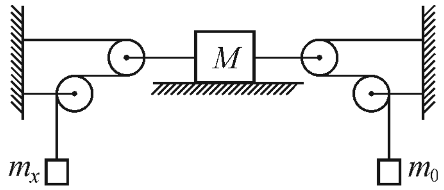


Проведем две горизонтальные пунктирные линии, соответствующие положению автомобилиста 60 км и 80 км (это – границы участка дороги, на котором должна была произойти встреча). Для того, чтобы иметь возможность оказаться в любом месте этого участка ровно в 12.00 (через 60 минут после начала движения), автомобилист должен был ехать со скоростью от 1 км/мин до 4/3 км/мин. Соответствующие графики зависимости $S(t)$ обозначены буквами A и B. Для того, чтобы вовремя (в интервале от 50 минут до 65 минут от начала движения) проехать железнодорожный переезд, находящийся на 70-м километре дороги, автомобилист должен был двигаться со скоростью от 7/5 км/мин до 14/13 км/мин. Соответствующие графики зависимости $S(t)$ обозначены буквами C и D. Из построенных графиков сразу видно, что, двигаясь со скоростью 4/3 км/мин (график A), автомобилист сможет проехать переезд в течение нужного промежутка времени. А вот минимальная скорость движения автомобилиста должна быть равна 14/13 км/мин (график D).
Следовательно, автомобилист мог двигаться со скоростью от 14/13 км/мин ≈ 64,6 км/ч до 4/3 км/мин = 80 км/ч. Отметим, что этот интервал скоростей обычно является разрешенным правилами дорожного движения при езде по автодорогам за пределами населенных пунктов, а вот проезжать железнодорожный переезд, не останавливаясь, правилами запрещено.

Ответ: автомобилист мог двигаться со скоростью от 14/13 км/мин ≈ 64,6 км/ч до 4/3 км/мин = 80 км/ч.

Критерии оценок: Участник, давший обоснованный правильный ответ, получает 10 баллов. Если участник обоснованно получил не все значения из интервала скоростей, он получает 5 баллов. Если ни для одного из случаев участник не довел решение до верного ответа, он может получить до 2 утешительных баллов, если использовал формулу, связывающую скорость, время и расстояние.

Задача 2. В системе, изображенной на рисунке, все блоки невесомые, нити легкие и нерастяжимые, трения в осях блоков нет. Участки нитей, не лежащие на блоках, горизонтальны. Массы брусков, указанные на рисунке, известны. Модуль максимальной силы трения между бруском M и площадкой, на которой он лежит, равен F.



1) Чему может быть равна масса m_x левого бруска для того, чтобы система находилась в равновесии?
2) Чему равно отношение модулей скоростей брусков M и m_x в случае нарушения равновесия системы?

Возможное решение: 1) Пусть система находится в равновесии. Рассмотрим два крайних случая, при которых равновесие всё еще возможно. В первом случае равновесие может нарушиться из-за того, что станет слишком велика масса m_x, а во втором – станет слишком велика масса m_0.

Поскольку подвижный блок дает выигрыш в силе в 2 раза, то этим двум случаям соответствуют неравенства:

$$2m_x g - 2m_0 g \le F \quad \text{и} \quad 2m_0 g - 2m_x g \le F \ .$$

Эти неравенства можно переписать в виде $m_0 - \dfrac{F}{2g} \le m_x \le m_0 + \dfrac{F}{2g}$.

2) Пусть равновесие системы нарушилось, и бруски пришли в движение. Если брусок массой m_x переместится на расстояние x, то брусок массой M переместится на расстояние $x/2$. Значит, скорость бруска M в любой момент времени меньше скорости бруска m_x в 2 раза.

Ответ: 1) масса m_x левого бруска может лежать в пределах $m_0 - \dfrac{F}{2g} \le m_x \le m_0 + \dfrac{F}{2g}$;
2) в случае нарушения равновесия модуль скорости бруска M вдвое меньше модуля скорости бруска m_x.

Критерии оценок: Участник, давший обоснованный правильный ответ на первый вопрос, получает 6 баллов. Если интервал масс указан не полностью (но обоснованно найдено хотя бы одно значение массы из данного интервала), участник получает за первый вопрос 3 балла. Если решение не доведено до правильного ответа хотя бы в одном случае, участник может получить не более 1 утешительного балла по любому из оснований: на рисунке изображены силы, действующие на хотя бы один из грузов; записано условие равновесия хотя бы одного из грузов.
Участник, давший обоснованный правильный ответ на второй вопрос, получает 4 балла. Если решение не доведено до правильного ответа, участник может получить до 1 утешительного балла, если правильно указал соотношение между перемещениями хотя бы некоторых грузов и блоков.

Задача 3. Школьник Вася решил взвесить с помощью железных гирь найденный им недалеко от озера Чебаркуль небольшой кусок челябинского метеорита, используя симметричные равноплечие весы, сделанные из железа. В воздухе взвешивание дало результат M = 2,1 кг. Когда весы были полностью погружены в воду озера, результат был другим – для уравновешивания весов потребовалось положить на них гири, суммарная масса которых оказалась равной m = 1,8 кг. При этом и взвешиваемое вещество, и гири также были полностью погружены в воду. Чему равна плотность материала метеорита? Плотность железа равна $\rho_ж$ = 7,9 г/см^3, плотность воды $\rho_в$ = 1,0 г/см^3.

Возможное решение: Поскольку весы равноплечие, симметричные и целиком сделаны из одного материала, то на их чаши после погружения в воду будут действовать одинаковые выталкивающие силы, которые будут создавать одинаковые моменты. Поэтому равновесие пустых весов в воде не нарушится, и их по-прежнему можно считать равноплечими.

Согласно условию задачи, масса найденного Васей куска метеорита равна M. При взвешивании в воде на этот кусок, помимо направленной вниз силы тяжести Mg, действует направленная вверх сила Архимеда $\rho_в g V_м$, где объем метеорита $V_м = M/\rho_м$, а $\rho_м$ – искомая плотность материала метеорита. На гири массой m, находящиеся в воде, действуют направленная вниз сила тяжести mg и направленная вверх сила Архимеда $\rho_в g V_г$, где $V_г = m/\rho_ж$ – объем гирь.

Поскольку весы, погруженные в воду, при взвешивании куска метеорита находятся в равновесии, то можно записать:

$$Mg - \rho_в g V_м = mg - \rho_в g V_г .$$

Отсюда

$$M\left(1 - \frac{\rho_в}{\rho_м}\right) = m\left(1 - \frac{\rho_в}{\rho_ж}\right).$$

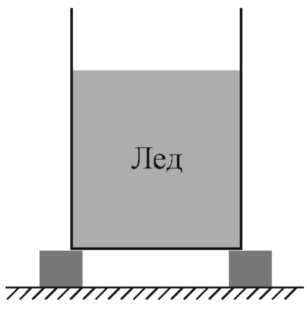
После простых преобразований получаем:

$$\rho_м = \frac{\rho_в \rho_ж M}{\rho_ж (M - m) + \rho_в m} = \frac{1 \cdot 7{,}9 \cdot 2{,}1}{7{,}9 \cdot (2{,}1 - 1{,}8) + 1 \cdot 1{,}8} \approx 4 \text{ г/см}^3.$$

Ответ: плотность материала метеорита равна $\rho_м = \dfrac{\rho_в \rho_ж M}{\rho_ж (M - m) + \rho_в m} \approx 4$ г/см^3.

Критерии оценок: Участник, давший обоснованный правильный ответ, получает 10 баллов; если получена только правильная формула без подстановки чисел - 9 баллов. Если решение не доведено до правильного ответа, участник может получить до 2 утешительных баллов по следующим основаниям: хотя бы раз верно использована формула, связывающая массу, плотность и объем - 1 очко; хотя бы раз верно использована формула для силы Архимеда - 1 очко.

Задача 4. Цилиндрическая бочка с тонкими гладкими вертикальными металлическими стенками, в которую наливают воду для полива растений на даче, имеет радиус R = 28,5 см. Бочка установлена на подставках (см. рисунок) так, что между её дном и землёй имеется слой воздуха. Осенью в бочке случайно оставили некоторое количество воды, и когда начались заморозки, вода медленно замёрзла (бочка при этом не деформировалась). Высота уровня льда в бочке оказалась равной h = 70 см. Потом наступила оттепель, воздух прогрелся, и лёд нагрелся до температуры t = 0 °C одновременно со всех сторон (сверху, снизу и с боковой поверхности). Затем лёд начал таять, и за время T = 1 час растаяло n = 2% от всей массы льда. Чему будет равна высота уровня воды в бочке (считая от дна) через первый час таяния, и чему – через второй час таяния? Плотность воды $\rho_в$ = 1000 кг/м^3, плотность льда $\rho_л$ = 900 кг/м^3.



Возможное решение: Поскольку плотность воды больше плотности льда, лёд будет плавать в воде, не касаясь дна бочки. Полная масса содержимого бочки (воды и льда) не меняется. Следовательно, не меняется вес содержимого бочки. Не меняется также и давление на дно бочки, поскольку оно равно $p = \dfrac{mg}{S}$, где m – масса содержимого бочки, S – площадь дна бочки, g – ускорение свободного падения.

После того, как лед начал таять, а нерастаявший лед всплыл, гидростатическое давление на дно стало равным $p = \rho_в gH$, где H – уровень воды в бочке. Отсюда следует, что уровень воды H будет всё время постоянным. Найдём этот уровень.

Начальная масса льда в бочке равна $m = \rho_л Sh$. С учетом этого получим: $p = \rho_л gh$. Поэтому $\rho_в gH = \rho_л gh$, и $H = \frac{\rho_л}{\rho_в} h =$ 63 см.

Легко убедиться, что такой уровень воды установится в бочке с самого начала. Действительно, если бы лёд таял только с боковой поверхности, то уровень воды в ней также был бы равен $H = \frac{\rho_л}{\rho_в} h$, но при этом лёд касался бы дна бочки. Но, поскольку лёд тает также сверху и снизу, высвобождается большее количество воды, и лёд будет всплывать.

Ответ: высота уровня воды в бочке будет постоянной и равной $H = \frac{\rho_л}{\rho_в} h =$ 63 см.

Критерии оценок: Участник, давший обоснованный правильный ответ, получает 10 баллов. Если решение не доведено до правильного ответа, участник может получить до 2 утешительных баллов по следующим основаниям: хотя бы раз правильно использована формула для давления жидкости на дно сосуда - 1 балл, хотя бы раз правильно использована формула для массы, плотности и объема - 1 балл.

9 класс

Задача 1. Школьница Варвара изучает равноускоренное движение бруска по наклонной плоскости вдоль оси *x*. С помощью специальных датчиков она исследует, в какие моменты времени *t* от начала движения передняя грань бруска проходит через точки с различными координатами *x*. Результаты измерений Варвара внесла в таблицу:

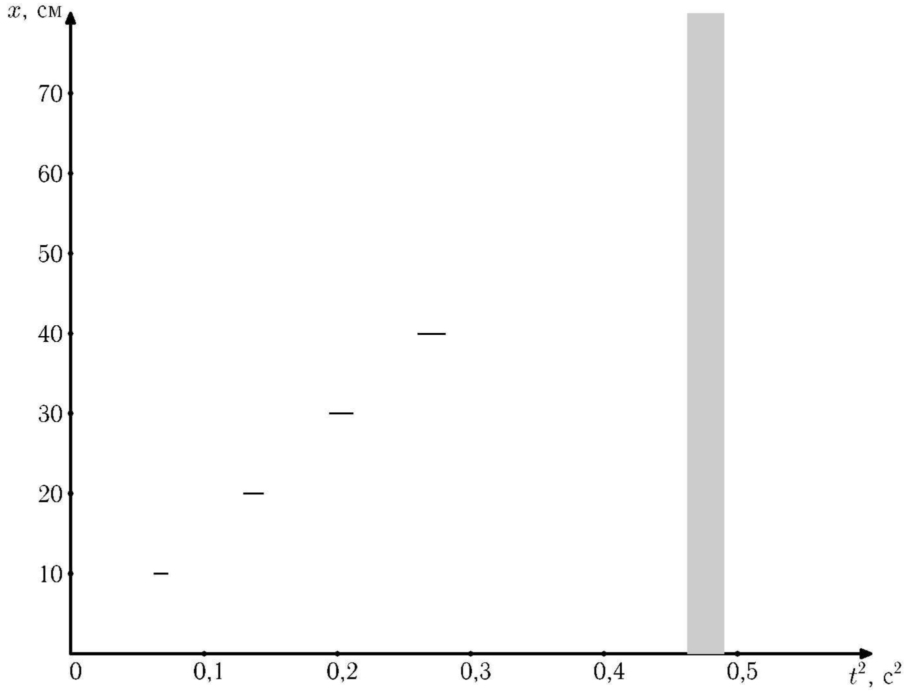
***x*, см**	10	20	30	40
***t*, с**	0,26	0,37	0,45	0,52

Погрешность измерения координаты составляет 0,1 см, точность показаний электронного секундомера 0,01 с. Брусок начинает двигаться без начальной скорости.

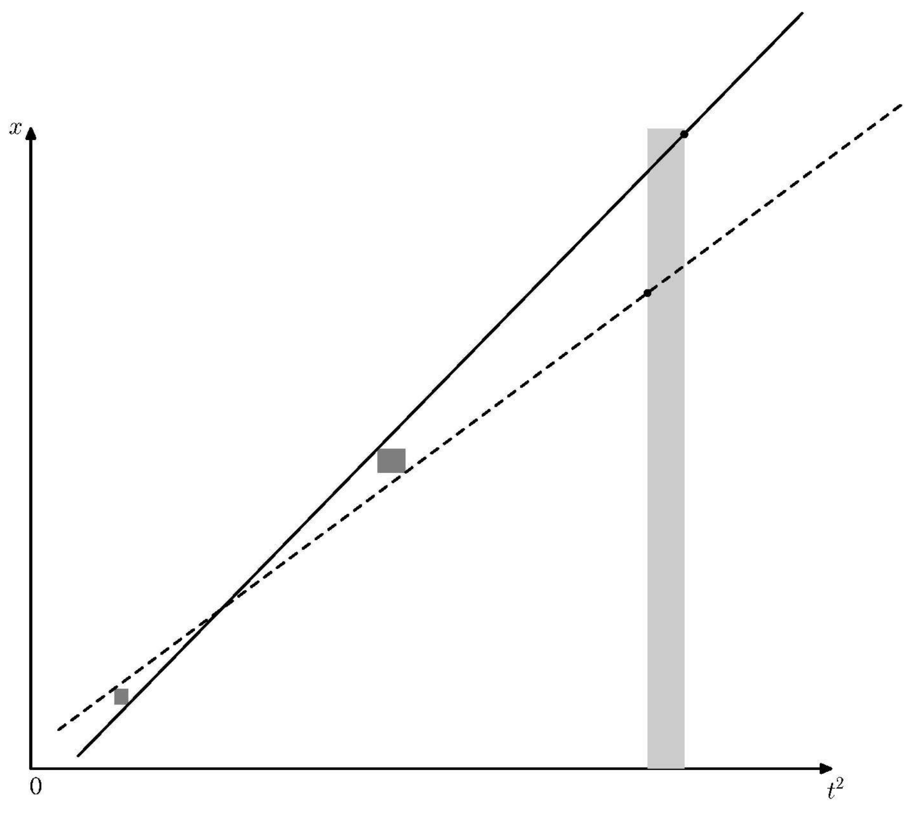
1) Каким может быть модуль ускорения бруска при движении по данной наклонной плоскости?

2) Какой результат можно получить при измерении координаты передней грани бруска в момент его остановки (из-за препятствия на наклонной плоскости), если секундомер в этот момент показал 0,69 с?

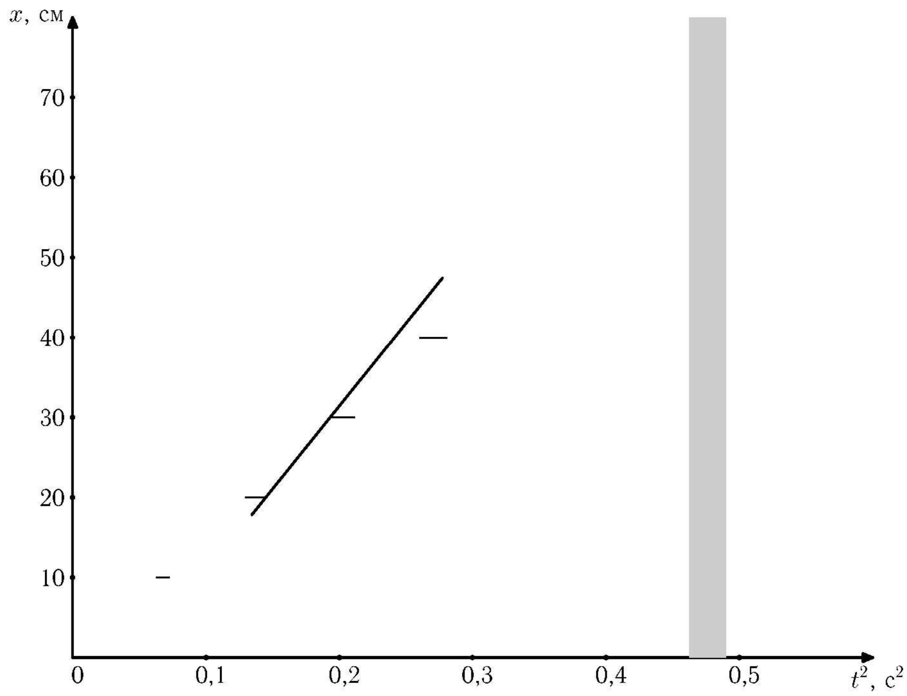
Возможное решение: При равноускоренном движении без начальной скорости координата x от времени t зависит следующим образом: $x=x_0+at^2/2$. Таким образом, зависимость x от t^2 оказывается линейной. Изобразим условие задачи на графике. Тогда условие задачи можно будет переформулировать так: требуется провести через четыре закрашенных прямоугольника прямую и определить возможные значения углового коэффициента этой прямой; также надо найти, каким может быть значение x при пересечении данной прямой с вертикальной полосой на рисунке.

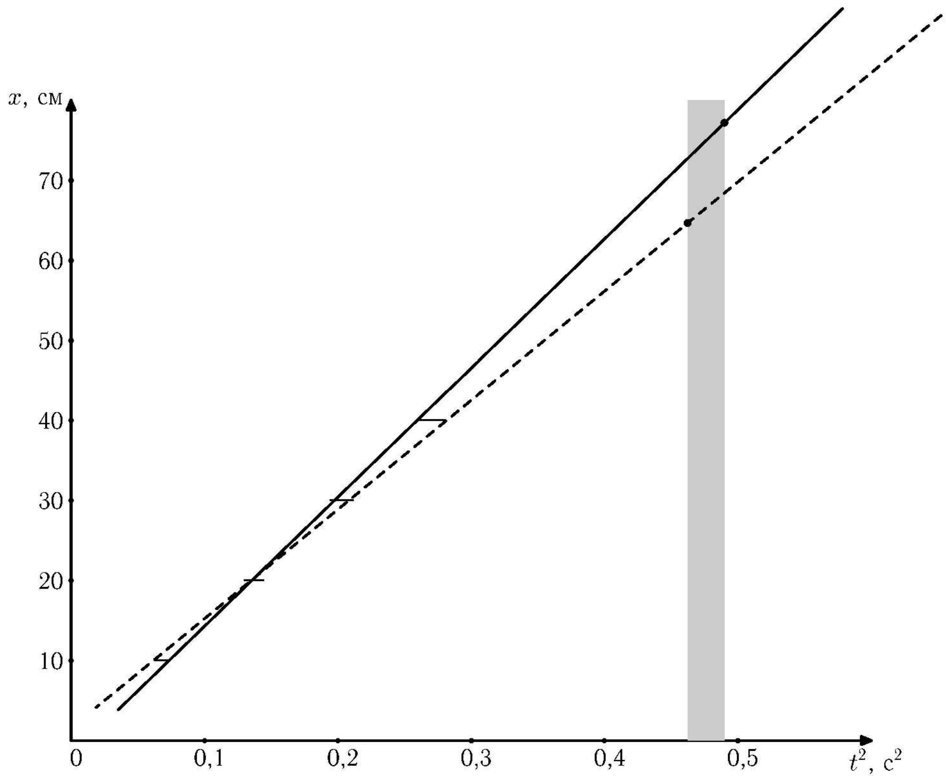


Сначала рассмотрим аналогичную задачу для двух прямоугольников. Прямые с наибольшим и наименьшим угловым коэффицентом изображены в этом случае на рисунке. Отмечены точки, соответствующие наименьшему и наибольшему значению координаты x в момент попадания на препятствие.



При наличии четырех прямоугольников на рисунке следует провести оптимальную прямую через границы двух прямоугольников так, чтобы она проходила внутри двух других прямоугольников. Получается, что прямую надо проводить через углы прямоугольников 1 и 4. Если же, к примеру, проводить прямую через границы прямоугольников 2 и 3, то она не пройдет внутри прямоугольников 1 и 4.





Если в моменты времени t_1, t_4 и t_5 координаты равны соответственно x_1, x_4 и x_5, то ускорение можно рассчитать по формуле $a=2(x_4-x_1)/(t_4^2-t_1^2)$. При этом координата x_5 выражается через другие параметры как $x_5=x_1+(x_4-x_1)(t_5^2-t_1^2)/(t_4^2-t_1^2)$.

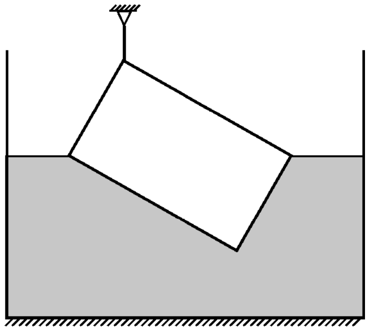
При t_1=0,27 с, x_1=9,9 см, t_4=0,51 с, x_4=40,1 см, t_5=0,70 с имеем: a=322,6 см/с^2, x_5=77,19 см.
При t_1=0,25 с, x_1=10,1 см, t_4=0,53 с, x_4=39,9 см, t_5=0,68 с имеем: a=272,9 см/с^2, x_5=64,67 см.

Ответ: ускорение может быть в интервале от 2,72 м/с^2 до 3,23 м/с^2; при измерении координаты можно получить результат от 64,6 см до 77,2 см.

Критерии оценок: Первый вопрос оценивается из 5 баллов. Участник, давший обоснованный правильный ответ на вопрос (нижняя граница ускорения 2,72 м/с^2 - 2,73 м/с^2, верхняя граница 3,22 м/с^2 - 3,23 м/с^2), получает 5 баллов. При частично правильном ответе (нижняя граница ускорения 2,7 м/с^2 - 2,8 м/с^2, верхняя граница 3,2 м/с^2 - 3,3 м/с^2) участник получает 4 балла. Если интервал участника перекрывается с интервалом 2,7-3,3 м/с^2 хотя бы частично, участник получает 3 балла. Если участник указал только одно возможное значение ускорение в данном интервале, он получает 2 балла.

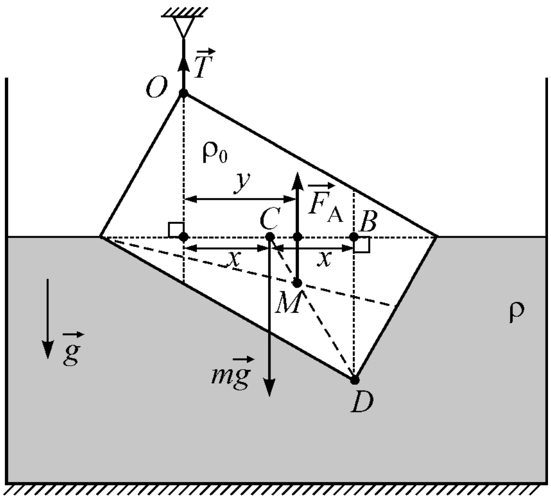
Второй вопрос оценивается из 5 баллов. Участник, давший обоснованный правильный ответ на вопрос (нижняя граница 64,6 см, верхняя граница 77,2 см), получает 5 баллов. Если интервал участника перекрывается с интервалом 64,6 - 77,2 см хотя бы частично, участник получает 3 балла. Если участник указал только одно возможное значение ускорение в данном интервале, он получает 2 балла.

Задача 2. Длинный однородный брусок с поперечным сечением в виде прямоугольника со сторонами $a \neq b$ подвешен на двух вертикальных нитях, прикрепленных к одному из ребер, над сосудом, в который наливают воду. Когда в сосуд налили некоторое количество воды, два ребра бруска оказались точно на поверхности воды (вид сбоку, со стороны вышеупомянутого поперечного сечения, показан на рисунке). Найдите плотность материала, из которого сделан брусок. Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.



Примечание: центр масс однородного треугольника расположен на пересечении его медиан.

Возможное решение: На брусок действуют сила натяжения нитей T, сила тяжести mg, приложенная к точке C на рисунке – центру масс бруска, и сила Архимеда F_A, приложенная к точке M пересечения медиан треугольного сечения погруженной части бруска. При равновесии сумма моментов силы тяжести и силы Архимеда относительно точки O подвеса равна нулю (сила натяжения нитей момента относительно этой точки не создает). Поэтому , где x и y – плечи соответствующих сил, $m = \rho_0 V$ – масса бруска, $F_A = \rho \frac{V}{2} g$, где V – объем бруска, ρ_0 – его плотность.

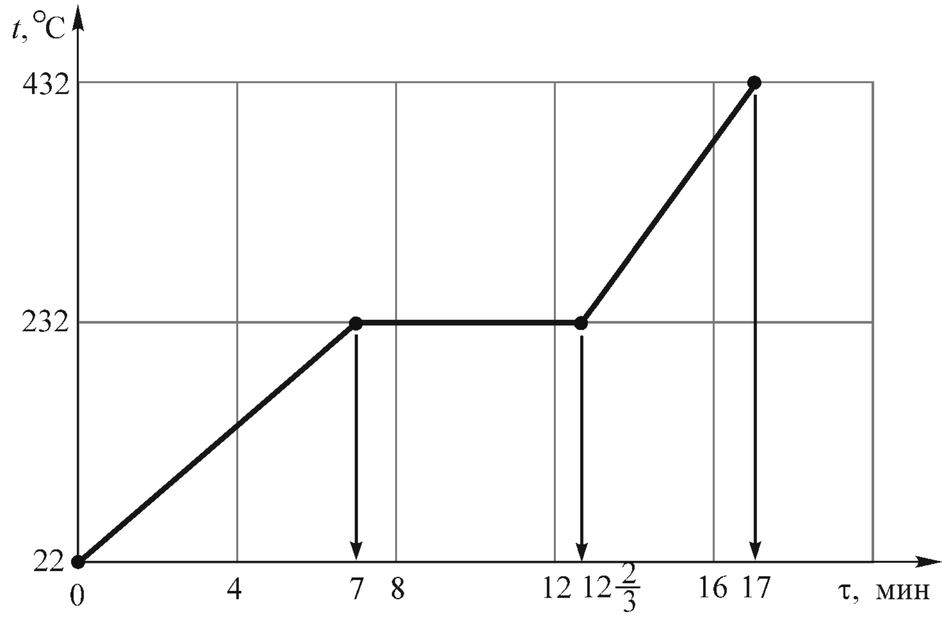


Из построения на рисунке следует, что $CB = x$ (поскольку точка C находится в центре симметрии бруска, а погруженная и не погруженная части бруска одинаковы). С учетом того, что медианы треугольника пересекаются на 1/3 своей длины, из треугольника CBD видно, что $y = x + \frac{1}{3}CB = x + \frac{x}{3} = \frac{4}{3}x$ (линия действия силы F_A отсекает на сторонах CD и CB отрезки, длины которых относятся к длинам соответствующих сторон как 1:3). Таким образом, $\rho_0 Vg \cdot x = \rho \frac{V}{2} g \cdot \frac{4}{3} x$, и следовательно, $\rho_0 = \frac{2}{3}\rho \approx 0{,}67$ г/см^3.

Ответ: плотность материала бруска $\rho_0 = \frac{2}{3}\rho \approx 0{,}67$ г/см^3.

Критерии оценок: Участник, давший обоснованный правильный ответ, получает 10 баллов. Если решение не доведено до правильного ответа, участник может получить до 3 утешительных баллов по следующим основаниям: использована идея применить правило рычага или правило моментов относительно любой оси - 1 балл; правильно указаны выражения для силы тяжести и силы Архимеда - 1 балл; правильно указана точка приложения силы Архимеда -1 балл.

Задача 3. По «счастливой» случайности отличнику Руслану и первой красавице Людмиле выпало вместе делать простейшую лабораторную работу по физике – «Определение удельной теплоты плавления неизвестного вещества». Руслан включил печь, установив некоторую определенную мощность нагревания, поместил в капсулу кусочек исследуемого вещества, и ровно в $10^{\underline{00}}$ по московскому времени начал измерения. Когда Руслан отошел к учителю, скучающая Людмила тайком переключила тумблер установки мощности печи в другое положение (которое, естественно, не запомнила) и более его не меняла.



К великому удивлению Руслана, результат работы был совершенно неверным, и тогда, под угрозой двойки, Людмила созналась в содеянном. Учитель пожалел ребят и, сообщив им справочные данные, попросил определить: 1) установленную Людмилой мощность печи; и 2) точное московское время переключения Людмилой тумблера установки мощности. Используя полученный Русланом при «помощи» Людмилы график зависимости температуры t вещества от времени τ, помогите школьникам справиться с заданием учителя.

Справочные данные: удельная теплоемкость исследуемого вещества в жидком состоянии ; удельная теплота плавления этого вещества $\lambda = 60$ кДж/кг; масса кусочка вещества $m = 50$ г; мощность печи, первоначально установленная Русланом, $P_1 = 6$ Вт.

Возможное решение:1) Поскольку в условии сказано, что Руслан поместил в капсулу «кусочек исследуемого вещества», то изначально вещество находилось в твердом состоянии. Так как углы наклона графиков, соответствующих нагреванию вещества и в твердом, и в жидком состояниях не изменяются, можно сделать вывод, что Людмила переключила печь в процессе плавления вещества, то есть в интервале от 10:07:00 до 10:12:40.

Значит, вещество в жидком состоянии всё время нагревалось при мощности, установленной Людмилой. Время нагревания в жидком состоянии равно $\Delta t_ж = 260$ с. Введем обозначения: $T = 432$ °C и $T_{пл} = 232$ °C/ Из уравнения теплового баланса находим мощность печи P_2, установленную Людмилой:

$$P_2 = \frac{mc_ж(T - T_{пл})}{\Delta t_ж} = \frac{0{,}05 \cdot 260 \cdot 200}{260} = 10 \text{ Вт.}$$

2) Обозначим момент начала плавления вещества t_0, момент окончания плавления t_1. Тогда время плавления вещества секунд. Пусть $\frac{1}{x}\Delta t$ секунд вещество плавилось при мощности мечи P_1, установленной Русланом, тогда $\left(1 - \frac{1}{x}\right)\Delta t$ секунд вещество плавилось при мощности печи P_2, установленной Людмилой. Из уравнения теплового баланса имеем:

$$\lambda m = P_1 \frac{1}{x}\Delta t + P_2\left(1 - \frac{1}{x}\right)\Delta t,$$

откуда находим

$$x = \frac{(P_2 - P_1)\Delta t}{P_2 \Delta t - \lambda m} = 3{,}4 .$$

Следовательно, Людмила переключила тумблер установки мощности через время

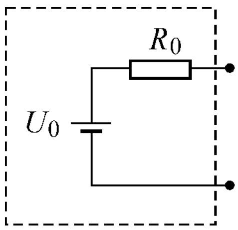
$$t = t_0 + \frac{\Delta t}{x} = 7 \cdot 60 + \frac{340}{3{,}4} = 420 + 100 = 520$$ секунд =8 минут и 40 секунд

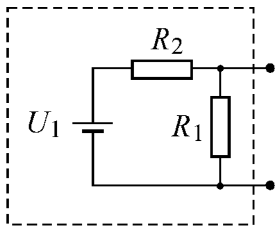
после начала эксперимента, или в 10 часов 8 минут 40 секунд по московскому времени.

Ответ: 1) мощность печи, установленная Людмилой, 10 Вт;
2) точное московское время переключения Людмилой тумблера установки мощности 10 часов 8 минут 40 секунд.

Критерии оценок: Первый вопрос оценивается из 5 баллов. Участник, давший обоснованный правильный ответ, получает 5 баллов. Если решение не доведено до правильного ответа, участник может получить до 2 утешительных баллов (если оснований больше двух - участник получает 2 балла) по следующим основаниям: из графика определены время нагревания и изменение температуры на последнем участке; отмечено, что получаемое количество теплоты равно произведению мощности на время; отмечено, что количество теплоты равно произведению удельной теплоемкости на массу и изменение температуры.
Второй вопрос оценивается из 5 баллов. Участник, давший обоснованный правильный ответ (момент времени), получает 5 баллов. Если момент времени правильно указан только относительно другого момента (8 минут 40 секунд после начала эксперимента, 1 минута 40 секунд после начала плавления), участник получает 4 балла. Если участник не дал правильного ответа, но указал, что момент изменения мощности приходится на горизонтальный участок графика, он получает 2 балла.

Задача 4. В «черном ящике» находится схема, состоящая из последовательно соединенных идеальной батарейки с напряжением U_0 = 3,3 В и резистора сопротивлением R_0 = 1500 Ом (рисунок слева). При попытке изготовить второй такой же «черный ящик» оказалось, что батареек с нужным напряжением 3,3 В в лаборатории больше нет, зато есть другая идеальная батарейка с напряжением U_1 = 5 В. По этой причине решили собрать схему, состоящую из имеющейся батарейки и двух резисторов, соединив эти элементы так, как изображено на рисунке справа. Найдите, какими должны быть сопротивления резисторов R_1 и R_2 для того, чтобы два этих «черных ящика» оказались эквивалентными друг другу.





Возможное решение: Подсоединим к клеммам ящиков вольтметр. В первом случае он покажет U_0, во втором случае ток в цепи будет равен $U_1/(R_1+R_2)$ и показание вольтметра окажется равно $U_1R_1/(R_1+R_2)$. Учитывая, что ящики эквивалентны, показания вольтметра для ящиков должны быть одинаковыми:

$U_0=U_1R_1/(R_1+R_2)$. (1)

Подсоединим теперь к клеммам ящиков амперметр. В первом случае он покажет U_0/R_0, во втором случае U_1/R_2. Ввиду эквивалентности ящиков

$U_0/R_0=U_1/R_2$ (2)

Также к клеммам ящиков можно подсоединить батарейку с настолько большим напряжением, что наличием батареек внутри ящиков можно будет пренебречь. В этом случае первый ящик будет выглядеть как электрическая цепь с сопротивлением R_0, второй - как цепь с сопротивлением $R_1R_2/(R_1+R_2)$. Поскольку ящики эквивалентны,

$R_0=R_1R_2/(R_1+R_2)$. (3)

Используя два любых соотношения из свойств (1), (2) и (3), можно однозначно восстановить сопротивления:

$R_1=R_0U_1/(U_1-U_0)\approx 2{,}3$ кОм, $R_2=R_0U_1/U_0\approx 4{,}4$ кОм. (4)

Только при таких значениях сопротивлений возможна эквивалентность черных ящиков.

Покажем теперь, что при сопротивлениях (4) черные ящики оказываются эквивалентными при подключении к клеммам резистора с произвольным сопротивлением R. В первой схеме сила тока через сопротивление равна $U_0/(R_0+R)$, а напряжение на данном сопротивлении оказывается равно

$U=U_0R/(R_0+R)$.

Определим напряжение U во втором случае. Сила тока через резистор R_2, равная $(U_1-U)/R_2$, складывается из силы тока через резисторы R_1 и R, которые равны U/R_1 и U/R:

$(U_1-U)/R_2=U/R_1+U/R$; отсюда $U=U_1/(R_2(R_2^{-1}+R_1^{-1}+R^{-1}))$.

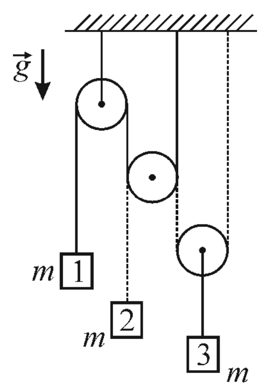
Черные ящики при подключении сопротивления R оказываются эквивалентны, если $U_0R/(R_0+R)=U_1/(R_2(R_2^{-1}+R_1^{-1}+R^{-1}))$. Выполнение данного равенства обеспечивается соотношениями (1) и (2).

Ответ: сопротивления резисторов должны быть равными $R_1=R_0U_1/(U_1-U_0)\approx 2{,}3$ кОм, $R_2=R_0U_1/U_0\approx 4{,}4$ кОм.

Критерии оценок: Участник, давший обоснованный правильный ответ, получает 10 баллов. Если нет доказательства эквивалентности черных ящиков при произвольном подключаемом сопротивлении, оценка снижается до 9 баллов. Если участник не пришел к правильному ответу, но правильно записал два уравнения из трех $U_0=U_1R_1/(R_1+R_2)$, $U_0/R_0=U_1/R_2$, $R_0=R_1R_2/(R_1+R_2)$ (полную систему уравнений), он получает 6 баллов. Если верно записано только одно уравнение из трех, участник получает 3 балла. Если участник не довел решение ни до одного из этих уравнений, он может получить 1 балл, если хотя бы раз применил закон Ома или законы последовательного или параллельного соединения проводников.

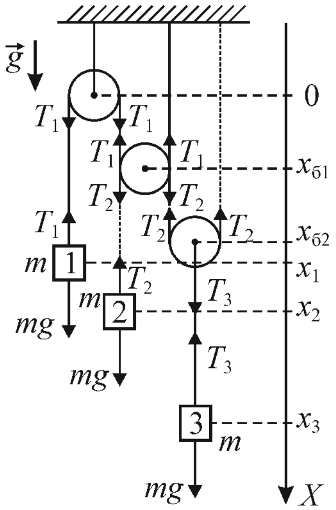
10 класс

Задача 1. Система, показанная на рисунке, состоит из трех блоков, трех одинаковых грузов, двух нитей (первая нить показана на рисунке сплошной линией, вторая – пунктирной) и короткой веревочки. К концу первой нити, перекинутой через средний и левый блоки, прикреплен первый груз массой *m*. К концу второй нити, перекинутой через правый и средний блоки, прикреплен второй груз массой *m*. Третий груз такой же массой подвешен на веревочке к оси правого блока. Участки нитей, не лежащие на блоках, вертикальны. Все блоки и нити можно считать невесомыми, нити и веревочку нерастяжимыми, а силы трения пренебрежимо малыми. При вращении среднего блока первая и вторая нити не мешают друг другу. Найдите модули ускорений грузов.



Возможное решение: Направим координатную ось *X* вертикально вниз, а начало координат поместим на уровне оси левого блока (см. рис.). На каждый из трех грузов действует направленная вниз сила тяжести, а также направленная вверх сила натяжения соответствующей нити или веревочки. Из-за невесомости нитей, веревочки и блоков, и ввиду отсутствия трения, сила натяжения вдоль каждой из нитей и вдоль веревочки не изменяется.

Обозначим эти силы натяжения так, как показано на рисунке. Поскольку средний и правый блоки невесомы, то $T_1 = T_2 = T$ и $T_3 = 2T_2 = 2T$. Поэтому уравнения движения грузов, записанные в проекциях на ось X, имеют вид:



$$ma_1 = mg - T, \quad ma_2 = mg - T, \quad ma_3 = mg - 2T.$$

Для того, чтобы замкнуть систему уравнений, необходимо получить уравнение кинематической связи. Выразим длины обеих нитей и веревочки через координаты x_1, x_2 и x_3 грузов и координаты $x_{б1}$ и $x_{б2}$ подвижных блоков, и учтем, что эти длины не меняются:

$$2x_{б1} + x_1 = L_1 = \text{const},$$

$$x_{б2} + (x_{б2} - x_{б1}) + (x_2 - x_{б1}) = L_2 = \text{const},$$

$$x_3 - x_{б2} = L_3 = \text{const}.$$

Отсюда следует связь между малыми приращениями координат рассматриваемых тел:

$$2\Delta x_{б1} + \Delta x_1 = 0,$$

$$2\Delta x_{б2} - 2\Delta x_{б1} + \Delta x_2 = 0,$$

$$\Delta x_3 - \Delta x_{б2} = 0.$$

Отсюда, исключая ускорения блоков, получим уравнение, связывающее приращения координат грузов: $2\Delta x_3 + \Delta x_1 + \Delta x_2 = 0$. Следовательно, связь между проекциями ускорений на ось X имеет вид:

$$a_1 + a_2 + 2a_3 = 0.$$

Решая полученную систему уравнений, находим:

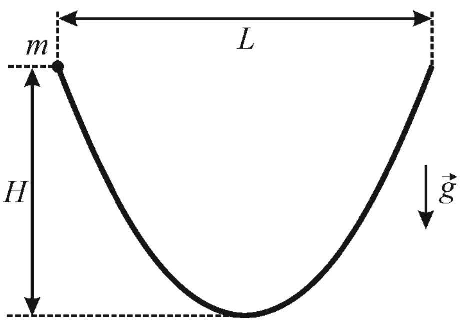
$$g - \frac{T}{m} + g - \frac{T}{m} + 2\left(g - \frac{2T}{m}\right) = 0,$$

откуда $T = \frac{2}{3}mg$. С учетом этого получаем: $a_1 = a_2 = g - \frac{2}{3}g = \frac{g}{3}$ и $a_3 = -\frac{a_1 + a_2}{2} = -\frac{g}{3}$. Таким образом, модули ускорений всех трех грузов одинаковы и равны $a = g/3$.

Ответ: модули ускорений грузов одинаковы равны $a = g/3$.

Критерии оценок: Участник, давший обоснованный правильный ответ, получает 10 баллов. Если участник не довел решение до правильного ответа, он может получить до 7 утешительных баллов по следующим основаниям: на рисунке указаны силы - 1 балл, правильно указана связь сил натяжений нитей - 2 балла, правильно записан второй закон Ньютона для всех грузов - 2 балла, правильно записано уравнение кинематической связи - 2 балла.

Задача 2. Отрезок проволоки изогнут в виде симметричного участка параболы и расположен так, что ось ее симметрии вертикальна. На этот отрезок надевают маленькую бусинку массой m, удерживая ее у одного из краев проволоки. Затем бусинку отпускают без начальной скорости, и она начинает скользить по проволоке под действием силы тяжести. Найдите модуль силы, с которой бусинка будет давить на проволоку, находясь в самой нижней точке своей траектории. Трение пренебрежимо мало. Размеры L и H, указанные на рисунке, известны.

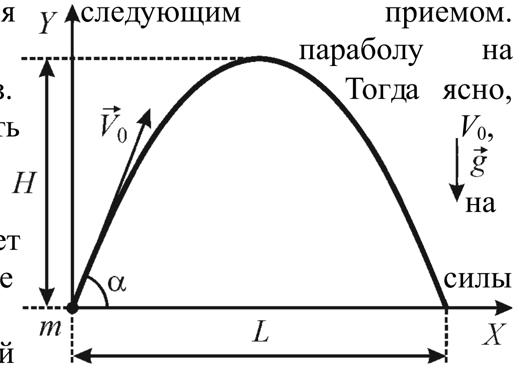


Возможное решение: Из закона сохранения механической энергии следует, что модуль скорости бусинки в нижней точке траектории равен $u = \sqrt{2gH}$. Запишем второй закон Ньютона для бусинки, находящейся в нижней точке траектории:

$$\frac{mu^2}{R} = N - mg ,$$

где N – сила реакции проволоки, которая равна по модулю искомой силе давления бусинки на проволоку, а R – радиус кривизны траектории бусинки в вершине параболы. Следовательно, задача сводится к отысканию R.

Для того, чтобы найти R, воспользуемся следующим приемом. Мысленно перевернем сделанную из проволоки параболу на 180° так, чтобы ее ветви оказались направленными вниз. Тогда ясно, что можно сообщить бусинке такую начальную скорость V_0, направленную по касательной к проволоке, чтобы бусинка в процессе своего движения нигде не давила на проволочную параболу. При этом проволоку можно будет удалить, а бусинка будет просто свободно лететь в поле силы тяжести по соответствующей параболической траектории. Введем оси X и Y прямоугольной декартовой системы координат так, как показано на рисунке, и обозначим угол между вектором $\vec{V}_0$ и горизонталью через α. Тогда закон движения бусинки можно записать в следующем виде:



$$x = V_0 \cos\alpha \cdot t , \qquad y = V_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} .$$

Исключая время t, получим уравнение параболической траектории бусинки:

$$y = x\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{g(1+\mathrm{tg}^2\alpha)}{2V_0^2}x^2 .$$

Поскольку нам заданы три точки параболы с координатами (0; 0), (L/2; H) и (L; 0), можно записать два уравнения:

$$H = \frac{L}{2}\mathrm{tg}\alpha - \frac{g(1+\mathrm{tg}^2\alpha)}{2V_0^2}\frac{L^2}{4} , \qquad 0 = L\mathrm{tg}\alpha - \frac{g(1+\mathrm{tg}^2\alpha)}{2V_0^2}L^2 .$$

Из второго уравнения выражаем $V_0^2 = \dfrac{gL(1+\mathrm{tg}^2\alpha)}{2\mathrm{tg}\alpha}$; и далее, с учетом этого, из первого уравнения находим $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{4H}{L}$ и $V_0^2 = \dfrac{g(L^2+16H^2)}{8H}$.

В верхней точке параболической траектории бусинка имеет скорость $V_0\cos\alpha$, а ускорение бусинки по модулю равно g и направлено к центру кривизны траектории, то есть представляет собой центростремительное ускорение. Отсюда радиус кривизны параболы в ее вершине равен

$$R = \frac{(V_0\cos\alpha)^2}{g} = \frac{V_0^2}{g}\cdot\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{L^2}{8H} .$$

Поскольку мы рассматривали ту же самую проволочную параболу, только перевернутую, то радиус кривизны исходной параболы в ее вершине точно такой же.

Возвращаясь к началу решения задачи, получаем:

$$N = m\left(\frac{u^2}{R} + g\right) = m\left(\frac{2gH\cdot 8H}{L^2} + g\right) = mg\left(1 + \frac{16H^2}{L^2}\right).$$

Ответ: модуль силы давления бусинки на проволоку равен $N = mg\left(1+\frac{16H^2}{L^2}\right)$.

Критерии оценок: Участник, давший обоснованный правильный ответ, получает 10 баллов. Если решение не доведено до правильного ответа, участник может получить не более 4 утешительных баллов по основаниям: правильно использован закон сохранения энергии - 1 балл, правильно записан второй закон Ньютона - 1 балл, правильно найден радиус кривизны в нижней точке параболы - 2 балла.

Задача 3. Один моль идеального газа участвует в циклическом процессе тепловой машины, работающей в режиме теплового двигателя. В состоянии 1 газ имеет температуру T_1 и объем V_1. Известно, что все переходы газа из одного состояния в другое – политропические. Показатель политропы процесса $2-3$ на единицу больше показателя политропы процесса $3-1$ и на единицу меньше показателя политропы процесса $1-2$. В процессе $1-2$ объем газа увеличивается в k раз. Один из процессов цикла – изотермический, причем в этом процессе объем газа изменяет свое значение в максимально широких пределах в этом цикле.

1) Определите объем и температуру газа в состоянии 3.

2) Изобразите на $pV-$диаграмме цикл, соответствующий условию задачи, указав для каждого из процессов его показатель политропы.

Справка: Политропическим называется процесс, в течение которого теплоемкость газа не изменяется: $C = \text{const}$. Уравнение такого процесса имеет вид $pV^n = \text{const}$, или $p_1V_1^n = p_2V_2^n$. Величину *n* называют показателем политропы.

Возможное решение: Запишем уравнение политропического процесса в TV –переменных. Для этого воспользуемся уравнением Клапейрона–Менделеева: если $pV^n = \text{const}$, то $\frac{\nu RT}{V}V^n = \text{const}$, тогда $TV^{n-1} = \text{const}'$.

Температура и объем газа в стояниях 1 и 2 связаны соотношением $T_1V_1^{n-1} = T_2V_2^{n-1}$, где n – показатель политропы процесса $1-2$. Учитывая условие задачи ($V_2 = kV_1$), получаем:

$$T_2 = T_1\frac{V_1^{n-1}}{V_2^{n-1}} = T_1\frac{V_1^{n-1}}{(kV_1)^{n-1}} = \frac{T_1}{k^{n-1}}.$$

Так как по условию задачи показатель политропы процесса $2-3$ на единицу меньше показателя политропы процесса $1-2$, то уравнение этого процесса будет иметь вид: $TV^{(n-1)-1} = TV^{n-2} = \text{const}'$. Тогда $T_2V_2^{n-2} = T_3V_3^{n-2}$, или $\frac{T_1}{k^{n-1}}\cdot(kV_1)^{n-2} = T_3V_3^{n-2}$. Следовательно, связь между температурой и объемом газа в состоянии 1 и в состоянии 3 имеет вид: $\frac{T_3}{T_1} = \frac{k^{n-2}\cdot V_1^{n-2}}{V_3^{n-2}\cdot k^{n-1}} = \frac{V_1^{n-2}}{V_3^{n-2}\cdot k}$.

Показатель политропы процесса $3-1$ на единицу меньше показателя политропы процесса $2-3$. Значит, уравнение этого процесса будет иметь вид: $TV^{(n-1)-2} = TV^{n-3} = \text{const}'$.

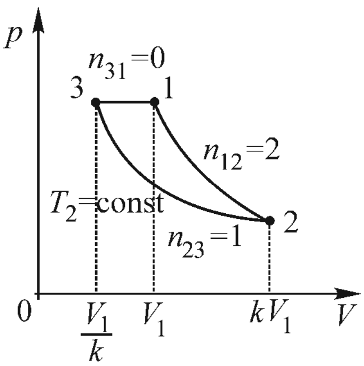
Тогда, $T_3V_3^{n-3} = T_1V_1^{n-3}$. Отсюда находим, что $\frac{T_3}{T_1} = \frac{V_1^{n-3}}{V_3^{n-3}}$.

Объединяя полученные выражения, находим, что $\dfrac{V_1^{\,n-2}}{V_3^{\,n-2}\cdot k}=\dfrac{V_1^{\,n-3}}{V_3^{\,n-3}}$, или $V_3=\dfrac{V_1}{k}$, и

$$T_3=T_1\frac{V_1^{\,n-3}}{V_3^{\,n-3}}=T_1\frac{V_1^{\,n-3}k^{n-3}}{V_1^{\,n-3}}=T_1k^{n-3}.$$

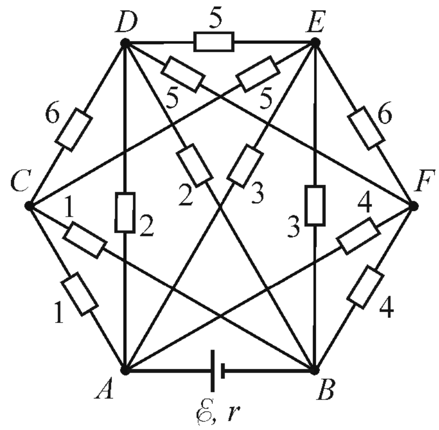
Как следует из уравнения политропического процесса, объем в таком процессе при любом n изменяется монотонно. Следовательно, в данном цикле изменение объема в максимально широких пределах (от kV_1 до V_1/k) происходит в процессе $2-3$. Поэтому изотермическим является процесс $2-3$. Поэтому $n=2$, и $T_3=T_1/k$. Соответствующий цикл изображен на рисунке.

Ответ: 1) объем газа в состоянии 3 равен $V_3=V_1/k$, а его температура равна $T_3=T_1/k$;
2) диаграмму см. на рисунке



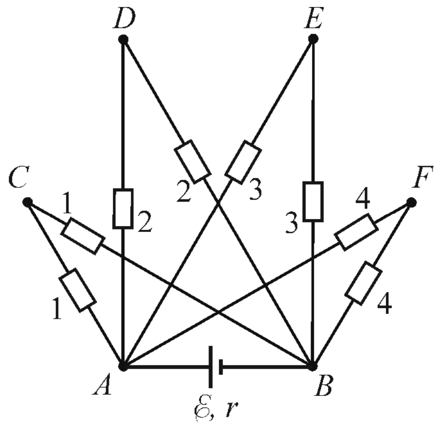
Критерии оценок: Участник, правильно изобразивший цикл на рисунке и обосновавший это построение, получает 6 баллов. Если решение не доведено до правильного рисунка, участник может получить до 2 утешительных баллов по основаниям: использовано уравнение идеального газа (уравнение Менделеева-Клапейрона) - 1 балл, уравнение политропического процесса записано в TV-переменных - 1 балл.
Участник, давший обоснованные верные ответы на вопросы об объеме и температуре газа в состоянии 3, получает по 2 балла за каждый из ответов (4 балла за два правильных ответа и 2 балла за один правильный ответ).

Задача 4. Найдите тепловую мощность, выделяющуюся в участке *ACDEFB* цепи, подключенном в точках *A* и *B* к батарее с ЭДС $\mathcal{E}$ = 5 В и внутренним сопротивлением r = 1,04 Ом. Сопротивления резисторов указаны на схеме в Ом, сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь. Провода соединены только в местах, обозначенных точками.



Мысленно удалим из рассматриваемого участка цепи все резисторы с сопротивлениями 5 Ом и 6 Ом. В результате получится новая цепь, схема которой показана на рисунке.

Рассмотрим участок *ACB*. Он состоит из двух последовательно соединенных одинаковых резисторов. Поэтому разность потенциалов между точками *A* и *C* равна $\mathcal{E}$/2. Участок *ADB* также состоит из двух последовательно соединенных одинаковых резисторов (хотя и с другими сопротивлениями). Поэтому разность потенциалов между точками *A* и *D* также равна $\mathcal{E}$/2. Рассматривая аналогичным образом участки *AEB* и *AFB*, найдем, что разность потенциалов между точками *A* и *E*, а также *A* и *F* тоже равна $\mathcal{E}$/2. Следовательно, потенциалы точек *C*, *D*, *E* и *F* одинаковы. Поэтому через подключенные между этими точками резисторы с номиналами 5 Ом и 6 Ом ток не протекает, и эти резисторы на самом деле можно удалить из цепи. Тепловая мощность, выделяющаяся при этом в участке *ACDEFB* цепи, не изменится.



Найдем сопротивление $R_{общ}$ участка *ACDEFB* цепи, воспользовавшись формулами для сопротивлений параллельно и последовательно соединенных резисторов.

$R_{ACB}=2$ Ом, $R_{ADB}=4$ Ом, $R_{AEB}=6$ Ом, $R_{AFB}=8$ Ом,

$$\frac{1}{R_{общ}}=\frac{1}{R_{ACB}}+\frac{1}{R_{ADB}}+\frac{1}{R_{AEB}}+\frac{1}{R_{AFB}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{25}{24}\text{ Ом}^{-1},$$

откуда $R_{общ}=\dfrac{24}{25}$ Ом.

Через участок цепи с сопротивлением $R_{общ}$ протекает ток силой

$$I=\frac{\mathcal{E}}{r+R_{общ}}=\frac{5}{(26/25)+(24/25)}=\frac{5}{2}=2{,}5\text{ А.}$$

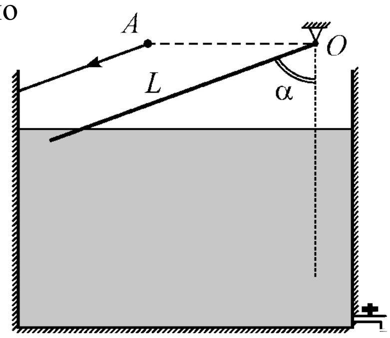
Напряжение между точками A и B при этом составляет $U=IR_{общ}=2{,}4$ В. Силы тока через отдельные резисторы оказываются равны: $I_{ACB}=U/R_{ACB}=1{,}2$ А, $I_{ADB}=U/R_{ADB}=0{,}6$ А, $I_{AEB}=U/R_{AEB}=0{,}4$ А, $I_{AFB}=U/R_{AFB}=0{,}3$ А. Согласно закону Джоуля-Ленца (выделяемая на резисторе мощность равна произведению квадрата силы тока на сопротивление резистора), найдем мощности на отдельных резисторах: $P_{AC}=P_{CB}=1{,}44$ Вт, $P_{AF}=P_{FB}=0{,}36$ Вт, $P_{AD}=P_{DB}=0{,}72$ Вт, $P_{AE}=P_{EB}=0{,}48$ Вт, $P_{CD}=P_{CE}=P_{DE}=P_{DF}=P_{EF}=0$. На всех резисторах цепи *ACDEFB* выделяется тепловая мощность $P = 6$ Вт.

Ответ: на резисторах цепи *ACDEFB* выделяется тепловая мощность $P = 6$ Вт.

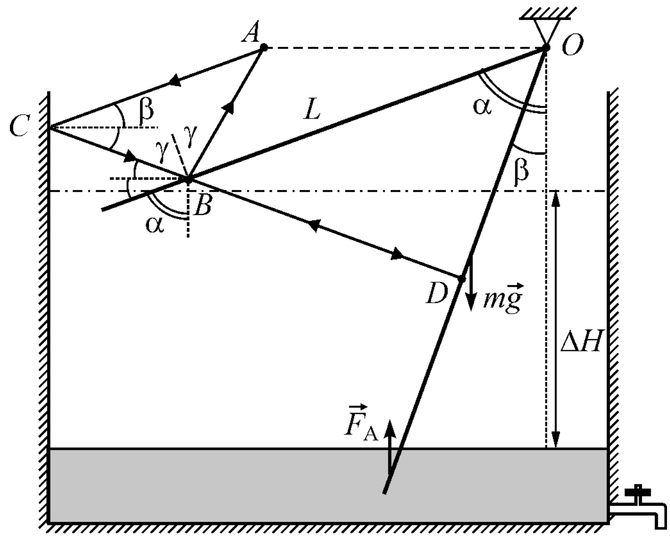
Критерии оценок: Участник, давший обоснованный правильный ответ, получает 10 баллов. Если решение не доведено до правильного ответа, участник может получить до 2 утешительных баллов по следующим основаниям: хотя бы раз правильно использован закон Ома - 1 балл, правильно использована формула для мощности электрического тока - 1 балл.

Задача 5. Отличник Тимофей уравновесил тонкую однородную палочку, прикрепленную одним концом к шарниру, опустив другой ее конец в вертикальный сосуд с жидкостью. При этом палочка находилась в равновесии, располагалась под углом α к вертикали и была погружена в жидкость на $1/n$ часть своей длины. Площадь горизонтального поперечного сечения сосуда S, длина палочки L, плотность ее материала ρ. Стенки сосуда и поверхность палочки посеребрены.

В некоторой точке *A* над поверхностью жидкости, на одной высоте с точкой крепления палочки, экспериментатор Тимофей расположил выходное окно лазерной указки, и направил от нее на стенку сосуда узкий световой луч, идущий параллельно палочке. Этот луч, распространяясь только в воздухе, отразился от стенки сосуда, затем отразился от палочки, и вернулся обратно в точку *A*. Но тут «добрая» подруга Анфиса решила привлечь внимание Тимофея и приоткрыла кран, через который жидкость начала медленно выливаться из сосуда. Тимофей сначала рассердился, но быстро успокоился, так как понял, что через некоторое время луч все равно вернется в точку *A* – главное, вовремя закрыть кран! Какую массу жидкости следует вылить из сосуда для того,



чтобы при неизменном угле падения света на стенку сосуда луч света, испущенный из точки A, распространяясь только в воздухе, опять вернулся в эту точку?



Возможное решение: Обозначим угол падения луча на стенку β, а угол падения луча на палочку γ. Из рисунка видно, что $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ и $2\beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$. Отсюда $\gamma = \alpha - \beta$.

При выливании жидкости угол наклона палочки к вертикали будет уменьшаться, следовательно, будет уменьшаться и угол γ. Когда угол наклона палочки к вертикали станет равным β, то луч света будет падать на палочку перпендикулярно к ее поверхности, и, отражаясь в точке D, вернется в точку C, а затем – в точку A.

Закрепленная на шарнире палочка находится в равновесии под действием трех сил: силы тяжести, силы Архимеда и силы реакции шарнира. Запишем уравнение моментов относительно шарнира O:

$$mg\frac{L}{2}\sin\alpha = \rho_ж g \cdot S\frac{L}{n} \cdot L\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\right)\sin\alpha .$$

Здесь учтено, что $F_A = \rho_ж g \cdot V_{погр} = \rho_ж g \cdot S\frac{L}{n}$, и плечо l этой силы $l = L - \frac{1}{2}\cdot\frac{L}{n}$. Так как $m = \rho V = \rho SL$, то $\rho = \rho_ж \frac{2n-1}{n^2}$, и $\rho_ж = \frac{\rho n^2}{2n-1}$.

Из уравнения моментов следует, что палочка будет погружена в жидкость на одинаковую глубину, независимо от высоты уровня жидкости (поскольку уравнение моментов справедливо при любом значении угла α – синус этого угла в уравнении сокращается). Поэтому изменение высоты уровня жидкости в сосуде

$$\Delta H = \left(L - \frac{L}{n}\right)(\cos\beta - \cos\alpha) = \left(L - \frac{L}{n}\right)(\sin\alpha - \cos\alpha),$$

откуда искомая масса выливаемой жидкости

$$m_ж = \rho_ж S\Delta H = \rho SL\frac{n(n-1)}{2n-1}(\sin\alpha - \cos\alpha).$$

Отметим, что решение задачи существует при $\sin\alpha > \cos\alpha$, то есть при $\alpha > \pi/4$. При невыполнении этого условия луч изначально не сможет попасть в точку A после отражения от палочки.

Ответ: из сосуда следует вылить жидкость массой $m_ж = \rho_ж S\Delta H = \rho SL\frac{n(n-1)}{2n-1}(\sin\alpha - \cos\alpha)$, решение существует при $\alpha > \pi/4$.

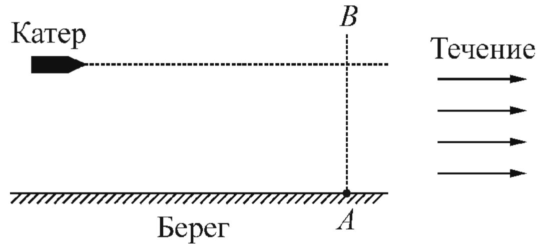
Критерии оценок: Участник, давший обоснованный правильный ответ, получает 10 баллов. Если решение не доведено до правильного ответа, участник может получить до 8 утешительных баллов по следующим основаниям: правильно нарисован ход лучей хотя бы для одного из случаев - 1 балл, указано, что угол наклона палочки во втором случае должен быть 90°-α - 3 балла; использована идея записать правило рычага или правило моментов - 1 балл; записано правильное выражение для силы Архимеда - 1 балл; указана правильно точка приложения силы Архимеда - 1 балл; показано, что глубина погружения палочки не зависит от уровня воды - 1 балл.

Возможные решения задач и критерии оценок

Авторы задач: Г.Н. Гайдуков, И.Н. Горбатый, М.Ю. Ромашка

На первом туре участникам олимпиады по 11 классу предложено пять задач, каждая из которых оценивается из 5 баллов (всего можно набрать до 25 баллов). Всякое полностью правильное и обоснованное решение задачи оценивается в 5 баллов, при частично правильном решении применяются приводимые ниже критерии оценок.

Задача 1. Вдоль направления течения прямой реки по спокойной воде плывёт маленький катер, траектория которого параллельна берегу и лежит на расстоянии L от него. Скорость течения реки равна V. Стоящий на берегу в точке A наблюдатель увидел, что первая волна от катера достигла точки A спустя время t после того, как катер пересёк прямую AB, перпендикулярную берегу (см. рис.). После этого волны ударяли о берег в этом месте с периодом T. Расстояние между соседними гребнями волн равно λ. Найдите скорость катера относительно воды, считая, что волны, возбуждаемые катером на поверхности воды, близки к гармоническим.



Возможное решение. Пусть v – скорость катера относительно стоячей воды, u – скорость распространения волн относительно поверхности стоячей воды. Запишем формулу для скорости волн, учитывая, что они близки к гармоническим:

$$u = \lambda / T_0, \qquad (1)$$

где – период волн в системе отсчёта, связанной с водой.

Перейдём в систему отсчёта, связанную с катером (см. рис. 1):

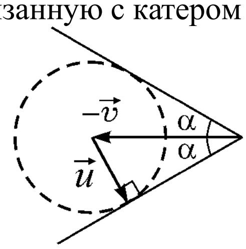


Рис. 1.

В этой системе отсчета вода движется относительно катера со скоростью $-v$, а волны распространяются относительно воды из каждой точки, в которой находился катер, во всех направлениях со скоростью, по модулю равной u (иначе говоря, гребни волн, испущенных в некоторый момент, в следующие моменты времени находятся на одинаковом расстоянии от точки испускания, которая движется со скоростью v). Из закона сложения скоростей следует, что относительно катера волны распространяются только внутри угла 2α, изображённого на рис. 1 (это так называемый «конуса Маха»; в трёхмерном случае волны распространяются внутри конуса). Относительно берега реки «конус Маха» как единое целое движется со скоростью , и поэтому гребни волн образуют с берегом тот же угол α, что изображён на рис. 1. Из условия задачи следует, что $u < v$ (иначе волны обгоняли бы катер, и первая волна пришла бы в точку A до того, как катер пересек линию AB).

Рассмотрим рис. 2, на котором показан гребень волны AD и набор параллельных ему гребней следующих волн.

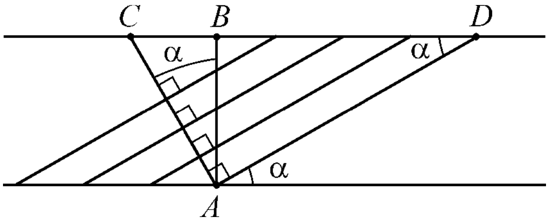


Рис. 2.

В точку A дошла волна, испущенная из точки C, а катер за это время прошёл отрезок CD. Из рис. 1 и рис. 2 следуют уравнения:

$$\sin\alpha = \frac{u}{v}, \tag{2}$$

$$L = BD \cdot \mathrm{tg}\alpha = (v + V)t \cdot \mathrm{tg}\alpha. \tag{3}$$

Свяжем величины и T (то есть фактически учтем эффект Доплера) – см. рис 3. Если волны распространяются в стоячей воде, то скорость движения вдоль берега точки E (это точка пересечения линии гребня волны с берегом) равна $u_1 = \dfrac{u}{\sin\alpha}$. Отрезок $AE = \dfrac{\lambda}{\sin\alpha}$. Поэтому $\dfrac{u}{\sin\alpha} = \dfrac{\lambda}{T_0 \sin\alpha}$. Если же волны распространяются в воде, которая течет со скоростью V, то эту скорость течения нужно добавить к скорости u_1, и учесть, что изменится период волн. При этом получится следующее соотношение: $\dfrac{u}{\sin\alpha} + V = \dfrac{\lambda}{T \sin\alpha}$, где T – заданный в условии задачи период волн, наблюдаемых в системе отсчета, связанной с берегом.

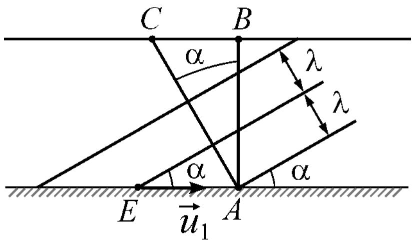


Рис. 3.

Отсюда

$$u = \frac{\lambda}{T} - V \sin\alpha. \tag{4}$$

Из уравнений (2) и (4) получаем:

$$v + V = \frac{\lambda}{T \sin\alpha}. \tag{5}$$

Из уравнений (3) и (5):

$$v + V = \frac{L}{t \cdot \mathrm{tg}\alpha} = \frac{\lambda}{T \sin\alpha}.$$

Отсюда $\cos\alpha = \dfrac{\lambda t}{LT}$, $\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\dfrac{\lambda t}{LT}\right)^2}$. С учетом этого, из (5) окончательно находим:

$$v = \frac{\lambda}{\sqrt{T^2 - \left(\dfrac{\lambda t}{L}\right)^2}} - V.$$

Отметим, что, поскольку $u < v$, то $V < \dfrac{\lambda}{\sqrt{T^2 - \left(\dfrac{\lambda t}{L}\right)^2}}$, то есть $v > 0$.

Ответ: скорость катера относительно воды равна $v = \dfrac{\lambda}{\sqrt{T^2 - \left(\dfrac{\lambda t}{L}\right)^2}} - V$.

Критерии оценок

Замечено, что в системе отсчета катера волны распространяются внутри «конуса Маха» и записано соотношение между скоростью v катера относительно воды, скоростью волн u относительно воды и углом α полураствора конуса Маха – 1 балл

Записана связь между L, v, V, t и α – 1 балл

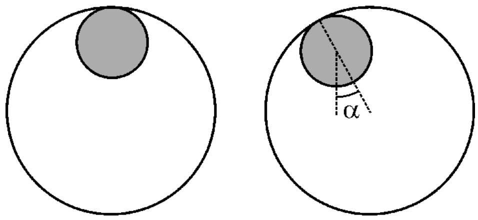
Учтен эффект Доплера (то есть получена связь между u, λ, T, V и α) – 1 балл

Получено выражение для угла α (через величины, заданные в условии задачи) – 1 балл

Получен правильный ответ – 1 балл

Всего: 5 баллов.

Задача 2. Цилиндрическое бревно радиусом r, ось которого горизонтальна, неподвижно закреплено. На бревно надет тонкий однородный обруч массой m и радиусом R так, как показано на рисунке слева. Обруч вывели из положения равновесия, отклонив его в плоскости рисунка так, что прямая, соединяющая центр обруча и точку касания обруча с бревном, образовала угол α с вертикалью (см. рис. справа), и отпустили. В процессе возникших после этого колебаний обруч движется по бревну без проскальзывания.



1) Найдите скорость нижней точки обруча при прохождении им положения равновесия.

2) Найдите модуль силы, с которой обруч давит на бревно при прохождении положения равновесия.

Возможное решение. Заметим, что центр масс обруча движется по окружности радиусом $R - r$. Пусть скорость центра масс обруча при прохождении обручем положения равновесия равна v. Скорость верхней точки обруча в этот момент равна нулю, поскольку обруч движется по бревну без проскальзывания. Таким образом, через верхнюю точку обруча проходит мгновенная ось вращения. Отсюда легко найти, что скорость нижней точки равна $V = 2v$. Движение обруча в этот момент можно представить как движение центра масс со скоростью v и вращение всех точек обруча в системе отсчета центра масс также со скоростью v. Кинетическая энергия обруча при таком движении равна $E_к = mv^2$. (Действительно, можно представить, что обруч сначала разогнали поступательно до скорости v, совершив при этом работу $mv^2/2$, а потом в системе отсчета центра масс раскрутили его, разогнав обод до скорости v, и совершив при этом работу, также равную $mv^2/2$. Суммарная работа в итоге будет равна $E_к = mv^2$).

При переходе обруча из исходного отклоненного положения в нижнее положение его центр масс опустится на величину.

Приравнивая начальную потенциальную энергию обруча его конечной кинетической энергии, получаем:

$$mv^2 = mgh.$$

С учетом выражения для h имеем:

$$v^2 = g(R-r)(1-\cos\alpha), \text{ и } v = \sqrt{g(R-r)(1-\cos\alpha)}.$$

Отсюда получаем, что искомая скорость нижней точки обруча при прохождении им положения равновесия равна $V = 2v = 2\sqrt{g(R-r)(1-\cos\alpha)}$.

Для ответа на второй вопрос задачи запишем уравнение движения центра масс для момента прохождения им нижней точки траектории в процессе движения по окружности радиусом $R-r$. Центр масс имеет при этом центростремительное ускорение, и

$$ma_{\text{цс}} = \frac{mv^2}{R-r} = mg(1-\cos\alpha) = N - mg,$$

где N – сила, с которой бревно действует на обруч. В соответствии с третьим законом Ньютона, обруч давит на бревно с такой же по модулю силой. Поэтому
$N = mg(2-\cos\alpha)$.

Ответ: 1) скорость нижней точки обруча при прохождении им положения равновесия равна $V = 2\sqrt{g(R-r)(1-\cos\alpha)}$

2) модуль силы, с которой обруч давит на бревно при прохождении положения равновесия, равен $N = mg(2-\cos\alpha)$.

Критерии оценок

Записано выражение для кинетической энергии обруча при движении его центра масс со скоростью v – 1 балл

Записан закон сохранения механической энергии для процесса перехода обруча из начального положения в положение равновесия – 1 балл

Найдена скорость нижней точки обруча при прохождении им положения равновесия – 1 балл

Записано уравнение движения центра масс обруча для момента прохождения им положения равновесия – 1 балл

Найден модуль силы, с которой обруч давит на бревно при прохождении положения равновесия – 1 балл

Всего: 5 баллов.

Задача 3. Туристы развели костёр и поставили кипятиться воду в котелке с плоским дном и вертикальными стенками. Когда вода закипела, котелок не сняли с костра, и спустя время $\tau = 8$ мин после начала кипения уровень воды в котелке уменьшился на $h = 2{,}5$ см. В этот момент начался дождь, но туристы продолжали поддерживать костёр, поскольку группа людей с продуктами задержалась. В каждом кубометре воздуха находится $n = 200$ дождевых капель, которые падают вертикально с постоянной скоростью $v = 9$ м/с. Температура каждой капли равна $t_0 = 20$ °С, а ее масса равна $m_0 = 50$ мг.

1) Будет ли вода в котелке продолжать кипеть после начала дождя? Ответ обоснуйте.

2) Как и за какое время после начала дождя уровень воды в котелке изменится еще на $H = 1$ см?

Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3, удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/(кг °С), удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}2 \cdot 10^6$ Дж/кг. Считайте, что подводимая к воде в котелке тепловая мощность всё время поддерживается постоянной.

Возможное решение. Пусть P – тепловая мощность, подводимая к воде в котелке от костра, S – площадь дна котелка. Вычислим величину P/S, то есть тепловую мощность, отнесённую к единице площади. Масса воды, которая испарилась из котелка за время τ, равна $m = \rho Sh$. Количество теплоты, подведённое к воде за это время, равно $P\tau = mr$. Поделив количество теплоты на время, получим мощность: $P = \frac{rm}{\tau} = \frac{r\rho Sh}{\tau}$. Отсюда $\frac{P}{S} = \frac{r\rho h}{\tau} \approx 1{,}15 \cdot 10^5$ Вт/м^2.

Теперь выясним, будет ли вода продолжать кипеть после начала дождя, или кипение прекратится. Масса дождевой воды, попадающей в котелок за некоторое время t, равна $M_{\text{дожд}} = Nm_0 = nSvtm_0$, где N – число капель, попадающих в котелок за рассматриваемое время.

Количество теплоты, необходимое для приведения этой воды в состояние кипения, равно

$$Q_1 = cM_{\text{дожд}}(100 - t_0) = cm_0 nSvt(100 - t_0).$$

Разделив обе части последнего уравнения на произведение St, получим тепловую мощность, приходящуюся на единицу площади, необходимую для того, чтобы попавшая в котелок дождевая вода закипала:

$$\frac{P_1}{S} = cm_0 nv(100 - t_0) \approx 3 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}^2.$$

Видно, что $\frac{P}{S} > \frac{P_1}{S}$. Это означает, что вода в котелке будет продолжать кипеть и после начала дождя.

Вычислим массу воды, которая будет испаряться за некоторое время t:

$$M_{\text{исп}}(t) = \frac{(P - P_1)t}{r}.$$

Полное изменение массы воды в котелке за время t от начала дождя равно разности масс воды, попавшей в котелок, и испарившейся из него:

$$\Delta M(t) = M_{\text{дожд}}(t) - M_{\text{исп}}(t) = m_0 nSvt - \frac{(P - P_1)t}{r}.$$

Изменение уровня воды в котелке за время t от начала дождя равно

$$x(t) = \frac{\Delta M(t)}{\rho S} = \left(\frac{m_0 nv}{\rho} - \frac{P - P_1}{\rho Sr}\right)t = kt,$$

где $k \approx 5{,}14 \cdot 10^{-5}$ м/с – величина в круглых скобках в последнем выражении. Положительный знак коэффициента k означает, что уровень воды в котелке будет увеличиваться. Поэтому время T, за которое уровень воды увеличится на H, равно:

$$T = \frac{H}{k} \approx \frac{10^{-2}}{5{,}14 \cdot 10^{-5}} \approx 195 \text{ с}.$$

Ответ: 1) Вода в котелке будет продолжать кипеть после начала дождя.

2) Уровень воды в котелке будет увеличиваться, и вырастет на $H = 1$ см за время $T \approx 195$ с.

Критерии оценок

Найдена тепловая мощность, отнесённая к единице площади котелка, поступающая от костра к воде – 1 балл

Записано уравнение теплового баланса для дождевой воды, попадающей в котелок – 1 балл

Показано, что вода в котелке будет продолжать кипеть и после начала дождя – 1 балл

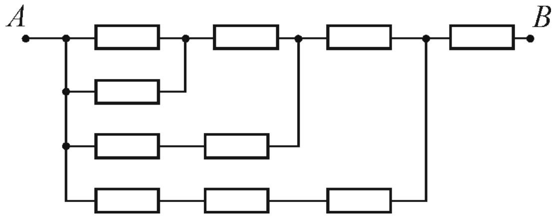
Записано выражение для полного изменения массы воды в котелке за время t от начала дождя – 1 балл

Получена формула для изменения уровня воды в котелке за время t от начала дождя – 0,5 балла

Сделан вывод о том, что уровень воды в котелке будет увеличиваться, и найдено, за какое время он вырастет на 1 см – 0,5 балла

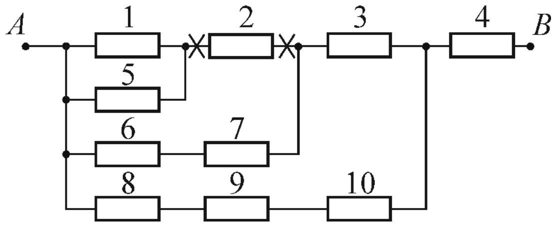
Всего: 5 баллов.

Задача 4. Участок AB электрической цепи, схема которого показана на рисунке, состоит из одинаковых резисторов и проводов, сопротивление которых пренебрежимо мало. Сопротивление этого участка цепи равно R_1 = 219 Ом. После того, как школьник Вася перерезал один из проводов, сопротивление участка AB стало равным R_2 = 255 Ом. В каких точках Вася мог перерезать провод? Укажите две такие точки. Ответ обоснуйте.



Решение

Рассмотрим участок AB электричкой цепи. Заметим, что он состоит из набора последовательно и параллельно соединённых звеньев.



Пронумеруем резисторы слева направо, начиная с верхнего ряда, так, как показано на рисунке. Обозначим сопротивление каждого из резисторов, из которых состоит участок цепи, через R, и выразим общее сопротивление через R. Будем двигаться вдоль участка цепи слева направо.

Резисторы №1 и №5 соединены параллельно, их общее сопротивление равно $R/2$. Затем последовательно к ним подсоединен резистор №2, что дает общее сопротивление $3R/2$. Далее к ним параллельно подключены два последовательно соединенных резистора № 6 и №7, с их учетом сопротивление равно $\frac{(3R/2)\cdot 2R}{(3R/2)+2R}=\frac{6R}{7}$. Добавляя последовательно соединенный резистор №3, получим сопротивление $13R/7$. Далее параллельно к полученному участку параллельно подсоединяются три последовательно включенных резистора №8, №9 и №10, что дает сопротивление $\frac{(13R/7)\cdot 3R}{(13R/7)+3R}=\frac{39R}{34}$. Наконец, путем последовательного подключения резистора №4, получим сопротивление всего участка цепи,: $R_{AB}=\frac{39R}{34}+R=\frac{73R}{34}=R_1$ (согласно условию, оно равно R_1 = 219 Ом). Отсюда R = 102 Ом.

Вычислим отношение $\frac{R_2}{R}=\frac{255}{102}=\frac{5}{2}$. Заметим, что резистор №4 добавляет к общему сопротивлению участка AB сопротивление R. Если этот резистор мысленно удалить, то сопротивление оставшегося участка цепи будет превышать R в $\frac{R_2-R}{R}=\frac{3}{2}$ раз. Следовательно, участок цепи, который остается после мысленного удаления резистора №4, после перерезания одного провода может состоять, например, из двух параллельно соединенных ветвей, каждая из которых содержит три последовательно включенных резистора. Обратим внимание на параллельные ветви цепи с резисторами №6, №7, №3 и №8, №9, №10. Сопротивление этих двух ветвей без резисторов №1, №2 и №5 равно как раз ($3R/2$).

Таким образом, для удовлетворения условию задачи нужно исключить резисторы №1,

№2 и №5 путем перерезания одного провода. Следовательно, Вася мог перерезать провод возле резистора №2 с любой из сторон от него (соответствующие места показаны на рисунке крестиками).

Ответ: Вася мог перерезать провод возле резистора №2 с любой из сторон от него (соответствующие места показаны на рисунке крестиками).

Критерии

Общее сопротивление участка цепи R_1 выражено через сопротивление одного резистора R – 1,5 балла

Найдено сопротивление резистора $R = 102$ Ом – 0,5 балла

Найдено отношение $R_2/R = 5/2$ – 1 балл

Замечено, что при удалении самого правого резистора сопротивление оставшегося участка цепи станет равно $3R/2$ – 0,5 балла

Указано, в каких точках надо разрезать провод для того, чтобы сопротивление оставшегося участка цепи стало равным $3R/2$ – 1,5 балла (если указана только одна точка, то снимается 0,5 балла)

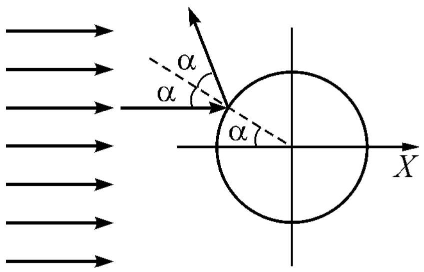
Всего: 5 баллов.

Задача 5. Шар радиусом R с зеркальной поверхностью освещают широким параллельным пучком света. Какую часть шара, и каким образом нужно покрасить черной краской, чтобы сила светового давления на шар оказалась максимальной?

Возможное решение. Рассматривая свет, как поток частиц (фотонов), запишем для силы светового давления на шар:

$$\vec{F} = -\frac{\Delta P}{\Delta t},$$

где ΔP – изменение импульса фотонов за время Δt в результате их отражения или поглощения поверхностью шара.



При зеркальном отражении фотона, падающего на шар под углом падения α (см. рис.), проекция его импульса на ось X (которая совпадает с направлением падающего пучка) изменяется на величину: $\Delta p_x = -p\cos(2\alpha) - p$,

где p – импульс фотона в падающем пучке. Если же фотон поглощается поверхностью шара, то изменение его импульса равно

$$\Delta p_x = -p\,.$$

Сравнивая эти два случая, видим, что при $\alpha < \pi/4$ изменение проекции импульса $|\Delta p_x|$ больше при зеркальном отражении, а при $\alpha > \pi/4$ сильнее изменяется проекция импульса при поглощении фотона. Поэтому для получения максимальной силы давления фотоны, падающие под углами $\alpha < \pi/4$, «выгоднее» отразить, а фотоны с б*о*льшими углами падения – поглотить.

Действительно, пусть передняя поверхность шара в пределах углов падения от 0 до $\alpha_0 = \pi/4$ зеркальная, а остальная поверхность закрашена. Мысленно увеличим граничный угол α_0 на малую величину $\Delta\alpha$, сдвинув границу окрашивания. В результате этого узкая полоска поверхности шара «превратится» из окрашенной в зеркальную. Пусть на эту полоску в единицу времени падает N фотонов. Тогда из-за сдвига границы проекция на ось X импульса, передаваемого шару отраженными фотонами, возрастет на

$$(\delta p_x)_{\text{отр}} = N[p + p\cos(2(\alpha_0 + \Delta\alpha))] = N\left[p + p\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\Delta\alpha\right)\right] = N[p - p\sin(2\Delta\alpha)],$$

а проекция на ось X импульса, передаваемого шару поглощенными фотонами, уменьшится на $(\delta p_x)_{\text{погл}} = Np$. Итоговое изменение проекция на ось X импульса, передаваемого шару фотонами, изменится на $\delta p_x = (\delta p_x)_{\text{отр}} - (\delta p_x)_{\text{погл}} = -Np\sin(2\Delta\alpha)$, то есть уменьшится. Значит, уменьшится и сила светового давления на шар. Если же мысленно уменьшить граничный угол α_0 на малую величину $\Delta\alpha$, сдвинув границу окрашивания в другую сторону, то проекция на ось X импульса, передаваемого шару поглощенными фотонами, увеличится на $(\delta p_x)_{\text{погл}} = Np$, а проекция на ось X импульса, передаваемого шару отраженными фотонами, уменьшится на

$$(\delta p_x)_{\text{отр}} = N[p + p\cos(2(\alpha_0 - \Delta\alpha))] = N\left[p + p\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\Delta\alpha\right)\right] = N[p + p\sin(2\Delta\alpha)].$$

Итоговое изменение проекция на ось X импульса, передаваемого шару фотонами, изменится на $\delta p_x = (\delta p_x)_{\text{погл}} - (\delta p_x)_{\text{отр}} = -Np\sin(2\Delta\alpha)$, то есть опять уменьшится. Значит, и в этом случае сила светового давления на шар уменьшится. Таким образом, сила светового давления при $\alpha = \alpha_0 = \pi/4$ действительно является максимальной.

Итак, заднюю (теневую) поверхность шара можно «красить» как угодно, это не влияет на силу давления, а освещенную поверхность следует оставить зеркальной в пределах центрального шарового сегмента высотой

$$h = R\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right) = R\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0{,}3R.$$

Ответ: зеркальной следует оставить поверхность шара в пределах центрального шарового сегмента высотой $h = R\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0{,}3R$; остальную часть шара, на которую попадает свет, нужно покрасить черной краской.

Критерии оценок

Записано выражение для изменения проекции импульса фотона на направление падения света при зеркальном отражении фотона – 1 балл

Записано выражение для изменения проекции импульса фотона на направление падения света при поглощении фотона – 1 балл

Указано (даже без доказательства), что выгоднее всего фотоны, падающие под углами $\alpha < \pi/4$, отразить, а фотоны с б***о***льшими углами падения – поглотить – 1 балл

Обосновано (любым способом – рассуждениями или вычислениями), что граница между зеркальной и закрашенной частями шара должна проходить по углу падения $\pi/4$ – 1 балл

Указано, какую часть шара, и каким образом нужно закрасить для того, чтобы сила светового давления на шар оказалась максимальной – 1 балл

Всего: 5 баллов.

Московская олимпиада школьников по физике, 2014/15, второй тур, 11 класс

Задачи, ответы и критерии оценок

Авторы задач:
С.Д. Варламов, Е.А.Вишнякова, Е.А. Мажник, М.Ю. Ромашка

Каждая задача оценивается из 10 баллов. Всего участник может набрать до 50 баллов.

Задача 1. С наклонной плоскости без проскальзывания скатывается тонкостенная труба, наматывая на себя сверху легкую и тонкую веревку, которую можно считать нерастяжимой. Свободный конец веревки прикреплен к бруску, лежащему на плоскости выше трубы. Масса трубы M, масса бруска $M/2$. Ось трубы горизонтальна, свободный участок веревки параллелен наклонной плоскости и перпендикулярен оси трубы. Плоскость составляет с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Ускорение, с которым поступательно движется брусок вслед за трубой, равно $0{,}3g$. Чему равен коэффициент трения μ между бруском и плоскостью?

Возможное решение: Предположим, что в начальный момент и труба и брусок имели нулевые скорости. Если брусок движется с ускорением $a = 0{,}3g$, а веревка нерастяжимая, то ускорение оси трубы будет вдвое меньше. Когда брусок переместится вдоль плоскости на расстояние L, ось трубы переместится на вдвое меньшее расстояние. Двигаясь с ускорением a, брусок приобретет скорость $V = \sqrt{2aL}$. Скорость оси трубы будет в два раза меньше. Запишем для рассматриваемой системы закон изменения механической энергии:

$$\frac{M}{2}gL\sin\alpha + Mg\frac{L}{2}\sin\alpha - \mu\frac{M}{2}g\cos\alpha\cdot L = \frac{(M/2)V^2}{2} + M\left(\frac{V}{2}\right)^2 = \frac{V^2}{2}\left(\frac{M}{2}+\frac{M}{2}\right) = MaL = \frac{3MgL}{10}.$$

Отсюда, после сокращения на MgL, получим:

$$\sin\alpha - \frac{\mu\cos\alpha}{2} = \frac{3}{10}.$$

Подставляя значение $\alpha = 30$, найдем ответ: $\mu = \frac{4\sqrt{3}}{15} \approx 0{,}46$.

Ответ: коэффициент трения между бруском и плоскостью равен $\mu = \frac{4\sqrt{3}}{15} \approx 0{,}46$.

Критерии оценок:

При решении с использованием закона изменения механической энергии:

Правильно записано (в том числе словами) уравнение кинематической связи (то, что ускорение оси трубы вдвое меньше ускорения бруска) – 2 балла

Правильно найдена скорость бруска (или оси трубы) при прохождении некоторого расстояния L – 1 балл

Правильно записан закон изменения механической энергии – 4 балла. Если предыдущий пункт явно не проделан, но в уравнении фигурируют правильные значения скоростей бруска и оси трубы – то сюда добавляется 1 балл из предыдущего пункта. Если в законе изменения механической энергии неправильно учтена кинетическая энергия катящейся трубы (ошибка в 2 раза), то за этот пункт ставится 2 балла.

Из закона изменения механической энергии получен правильный ответ для μ – 3 балла. Если по ходу вычислений сделана арифметическая ошибка, то за этот пункт ставится 2 балла.

При решении с использованием уравнений динамики (с использованием момента инерции):

Правильно записано (в том числе словами) уравнение кинематической связи (то, что ускорение оси трубы вдвое меньше ускорения бруска) – 2 балла

Правильно записан второй закон Ньютона для движения бруска вдоль плоскости – 1 балл

Правильно записан второй закон Ньютона для центра масс трубы – 2 балла

Правильно записано уравнение моментов для качения трубы – 2 балла (либо 4 балла, если оно записано относительно мгновенной оси вращения – в этом случае уравнение движения центра масс не нужно). В любом случае, если правильно записана полная система динамических уравнений для бруска и трубы (это может быть 2 или 3 уравнения – в зависимости от того, как выбрана ось для записи уравнения моментов) – то за это ставится всего 5 баллов.

Получен правильный ответ для μ – 3 балла. Если по ходу вычислений сделана арифметическая ошибка, то за этот пункт ставится 2 балла.

Всего: 10 баллов.

Задача 2. Один моль идеального газа участвует в циклическом процессе $1 \to 2 \to 3 \to 1$ холодильной машины. В состоянии 1 газ имеет температуру T_1 и объем V_1. Известно, что все переходы газа из одного состояния в другое – политропические. Показатель политропы процесса $2-3$ на единицу больше показателя политропы процесса $1-2$ и на единицу меньше показателя политропы процесса $3-1$. В процессе $1-2$ объем газа уменьшается в k раз. Один из процессов цикла – изотермический.

1) Определите объем газа в состоянии 3.

2) Изобразите на $pV-$диаграмме цикл, соответствующий условию задачи, указав для каждого из процессов его показатель политропы.

3) Чему может быть равна температура газа в состоянии 3?

Справка: Политропическим называется процесс, в течение которого теплоемкость газа не изменяется: $C = \text{const}$. Уравнение такого процесса имеет вид $pV^n = \text{const}$, или $p_1V_1^n = p_2V_2^n$. Величину n называют показателем политропы.

Возможное решение: Запишем уравнение политропического процесса в TV –переменных. Для этого воспользуемся уравнением Клапейрона–Менделеева: если $pV^n = \text{const}$, то $\frac{\nu RT}{V}V^n = \text{const}$, тогда $TV^{n-1} = \text{const}'$.

Температура и объем газа в стояниях 1 и 2 связаны соотношением $T_1V_1^{n-1} = T_2V_2^{n-1}$, где n – показатель политропы процесса $1-2$. Учитывая условие задачи ($V_2 = V_1/k$), получаем:

$$T_2 = T_1\frac{V_1^{n-1}}{V_2^{n-1}} = T_1\frac{V_1^{n-1}}{\left(V_1/k\right)^{n-1}} = k^{n-1}\cdot T_1.$$

Так как по условию задачи показатель политропы процесса $2-3$ на единицу больше показателя политропы процесса $1-2$, то уравнение этого процесса будет иметь вид: $TV^{(n+1)-1} = TV^n = \text{const}'$. Тогда $T_2V_2^n = T_3V_3^n$, или $k^{n-1}T_1\cdot\left(\frac{V_1}{k}\right)^n = T_3V_3^n$. Следовательно, связь между температурой и объемом газа в состоянии 1 и в состоянии 3 имеет вид: $\frac{T_3}{T_1} = \frac{k^{n-1}\cdot V_1^n}{V_3^n\cdot k^n} = \frac{V_1^n}{V_3^n\cdot k}$.

Показатель политропы процесса $3-1$ на единицу больше показателя политропы процесса $2-3$. Значит, уравнение этого процесса будет иметь вид: $TV^{(n+1+1)-1} = TV^{n+1} = \text{const}'$.

Тогда, $T_3 V_3^{\,n+1} = T_1 V_1^{\,n+1}$. Отсюда находим, что $\dfrac{T_3}{T_1} = \dfrac{V_1^{\,n+1}}{V_3^{\,n+1}}$.

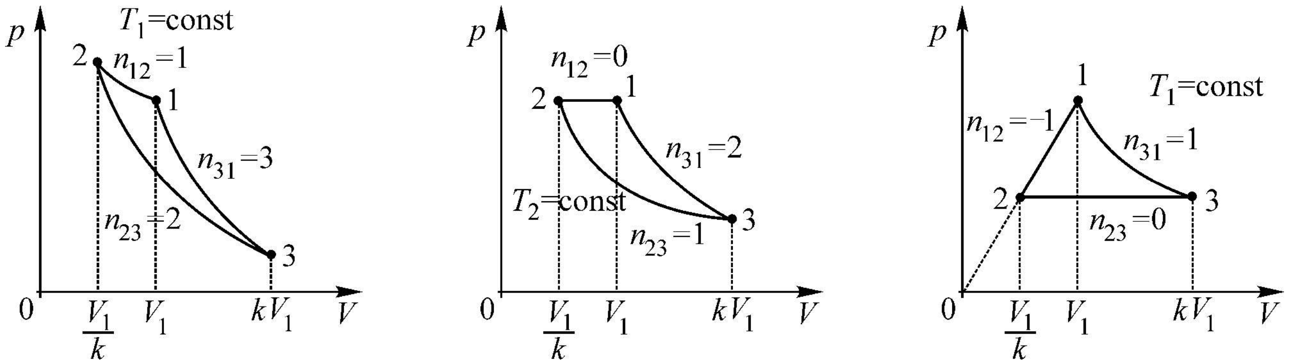
Объединяя полученные выражения, находим, что $\dfrac{V_1^{\,n}}{V_3^{\,n}\cdot k} = \dfrac{V_1^{\,n+1}}{V_3^{\,n+1}}$, или $V_3 = kV_1$, и

$$T_3 = T_1 \frac{V_1^{\,n+1}}{V_3^{\,n+1}} = T_1 \frac{V_1^{\,n+1}}{(kV_1)^{n+1}} = \frac{T_1}{k^{n+1}}.$$

Так как по условию задачи один из процессов – изотермический, то возможны три случая: процесс 1–2 изотермический ($n_{12} = n = 1$), процесс 2–3 изотермический ($n_{23} = n_{12} + 1 = 1$, откуда $n_{12} = n = 0$) и процесс 3–1 изотермический ($n_{23} = n_{31} - 1$ или $n_{31} = n_{23} + 1 = 1$, откуда $n_{23} = 0$ и $n_{12} = n_{23} - 1 = n = -1$). Соответствующие циклы изображены на рисунках.

Следовательно, температура газа в состоянии 3 может быть равна $T_3 = \dfrac{T_1}{k^2}$ (для случая, соответствующего первому рисунку), $T_3 = \dfrac{T_1}{k}$ (для случая, соответствующего второму рисунку) или $T_3 = T_1$ (для случая, соответствующего третьему рисунку).

Ответ: 1) объем газа в состоянии 3 равен $V_3 = kV_1$; 2) три возможные pV–диаграммы показаны на рисунке; 3) температура газа в состоянии 3 может быть равна $T_3 = \dfrac{T_1}{k^2}$, $T_3 = \dfrac{T_1}{k}$ или $T_3 = T_1$ (в порядке следования диаграмм).



Критерии оценок:

Правильно найден объем V_3 – 2 балла

Правильно найдена связь между T_3 и T_1 при произвольном n – 2 балла

Рассмотрены три возможных цикла, удовлетворяющих условию задачи, при этом на каждой диаграмме:

правильно изображены линии, соответствующие трем политропическим процессам – 0,5 балла;

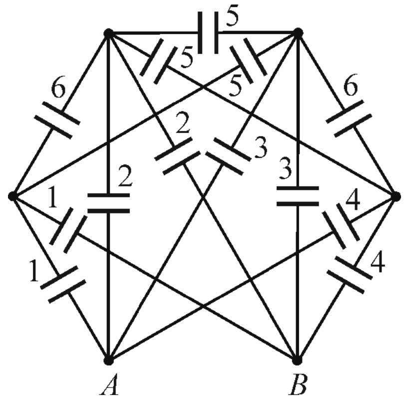
для каждого из трех процессов указан показатель политропы – всего 1 балл

Определены три возможных значения температуры T_3 (для трех возможных диаграмм) – по 0,5 балла за каждое правильное значение.

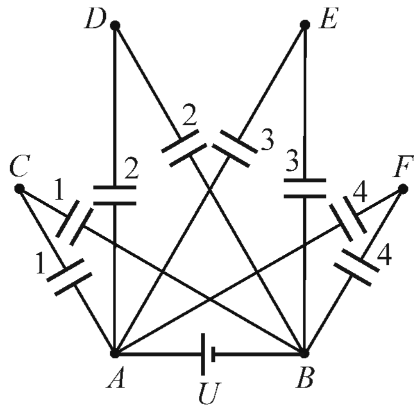
Таким образом, если правильно рассмотрен только один вариант из трех, то за задачу ставится 6 баллов.

Всего: 10 баллов.

Задача 3. Найдите электрическую емкость участка *AB* цепи, схема которого приведена на рисунке. Емкости конденсаторов указаны на схеме в мкФ, емкостью соединительных проводов можно пренебречь. Провода соединены только в местах, обозначенных точками.



Возможное решение: Мысленно удалим из участка цепи все конденсаторы с емкостями 5 мкФ и 6 мкФ, а к точкам *A* и *B* мысленно подсоединим клеммы источника напряжения *U*. В результате получится новый участок цепи, схема которого показана на рисунке.



Рассмотрим участок *ACB*. Он состоит из двух последовательно соединенных одинаковых конденсаторов. Поэтому разность потенциалов между точками *A* и *C* равна *U*/2. Участок *ADB* также состоит из двух последовательно соединенных одинаковых конденсаторов (хотя и других емкостей). Поэтому разность потенциалов между точками *A* и *D* также равна *U*/2. Рассматривая аналогичным образом участки *AEB* и *AFB*, найдем, что разность потенциалов между точками *A* и *E*, а также *A* и *F* тоже равна *U*/2. Следовательно, потенциалы точек *C*, *D*, *E* и *F* одинаковы. Поэтому между ними можно подключать незаряженные конденсаторы любых емкостей – они будут продолжать оставаться незаряженными.

Таким образом, исходный участок цепи имеет такую же емкость, как и рассмотренный нами вспомогательный участок цепи (без источника напряжения). Найдем его емкость, воспользовавшись формулами для емкостей параллельно и последовательно соединенных конденсаторов.

$$C_{ACB} = \frac{1\cdot 1}{1+1} = \frac{1}{2}\ \text{мкФ},\quad C_{ADB} = \frac{2\cdot 2}{2+2} = 1\ \text{мкФ},\quad C_{AEB} = \frac{3\cdot 3}{3+3} = \frac{3}{2}\ \text{мкФ},\quad C_{AFB} = \frac{4\cdot 4}{4+4} = 2\ \text{мкФ}.$$

$$C_{AB} = C_{ACB} + C_{ADB} + C_{AEB} + C_{AFB} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 = 5\ \text{мкФ}.$$

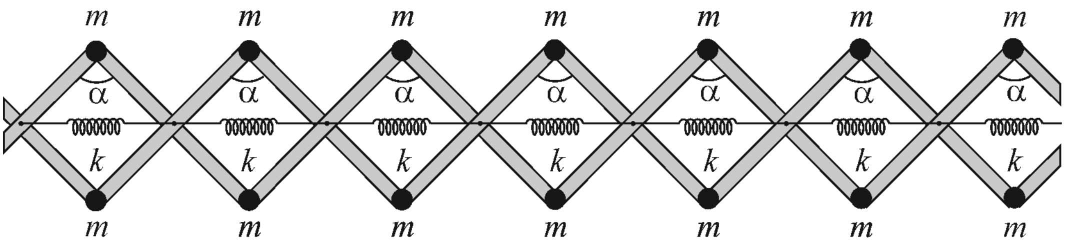
Ответ: электрическая емкость участка *AB* цепи равна $C_{AB} = 5$ мкФ.

Критерии оценок: Замечено и обосновано, что потенциалы точек *C*, *D*, *E* и *F* одинаковы – 5 баллов. Если обоснования нет (это просто указано и используется – 2 балла)

Нарисована эквивалентная схема, из которой исключены «лишние» конденсаторы емкостями 5 мкФ и 6 мкФ – 1 балл.

Правильно найдена электрическая емкость участка цепи – 4 балла (если при вычислении емкости сделана арифметическая ошибка – 2 балла)

Задача 4. Шарнирная конструкция состоит из очень большого числа N периодически повторяющихся одинаковых звеньев (см. рис). Каждое звено включает в себя пружину, концы которой прикреплены к серединам двух пар скрещенных реек, два сферических шарнирных блока и четыре половинки самих реек. Шарнирные блоки дают возможность рейкам свободно вращаться в пространстве. Жёсткость каждой из пружин равна k, масса каждого из шарнирных блоков равна m, все остальные элементы невесомы, трения нигде нет. Когда пружины не деформированы, рейки образуют между собой угол α. Концы этой конструкции соединили между собой, образовав большое кольцо, так, что пружины расположились вокруг цилиндрической поверхности. Получившаяся система колеблется таким образом, что в каждый момент времени все пружины сжаты или растянуты одинаково. Найдите период этих колебаний вокруг положения равновесия, считая их малыми. Система находится в невесомости.

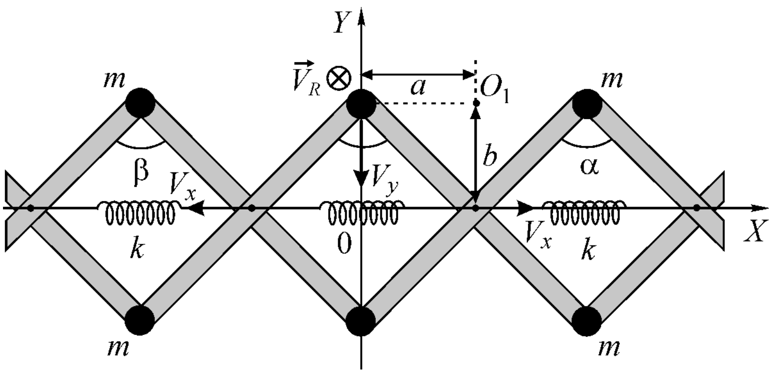


Возможное решение (первый способ): Пусть $R(t)$ – радиус кольца в момент времени t, $L(t)$ – длина одной пружины в этот момент, а R_0 и L_0 – радиус кольца и длина одной пружины в состоянии, когда пружины не деформированы. Поскольку $N >> 1$, можно записать:

$$2\pi R_0 \approx NL_0\,, \qquad 2\pi R \approx NL\,.$$

Пусть в некоторый произвольный момент в процессе колебаний системы все пружины оказались растянутыми на некоторую одинаковую величину. Тогда потенциальная энергия системы в этот момент равна

$$E_p = N\frac{kx^2}{2} = N\frac{k\left(L-L_0\right)^2}{2} = \frac{2k\pi^2\left(R-R_0\right)^2}{N}\,.$$



Рассмотрим одно звено конструкции (см. рис.). Предположим, что в рассматриваемый момент пружины продолжают растягиваться, а угол между рейками равен β (поскольку колебания малые, то $\beta \approx \alpha$). Это приводит к тому, что расстояние между блоками, входящими в состав одного звена, уменьшается, а радиус кольца увеличивается. Поэтому в данный момент каждый блок имеет составляющую скорости V_y, направленную к пружине, а также составляющую скорости V_R, направленную вдоль радиуса кольца (от оси цилиндрической поверхности). Следовательно, кинетическая энергия системы равна

$$E_k = 2N\frac{mV^2}{2} = NmV^2 = Nm\left(V_y^2 + V_R^2\right),$$

где V_y – компонента скорости блока, направленная перпендикулярно радиусу цилиндрической поверхности вдоль ее образующей (вдоль оси Y на рисунке), а V_R – радиальная компонента скорости блоков, направленная вдоль радиуса цилиндрической поверхности (за плоскость рисунка).

Согласно определению скорости, $V_R = \dfrac{dR}{dt} = R'(t)$. Найдём связь между V_y и V_R. Выберем в качестве начала координат середину одной из пружин в момент, когда она не деформирована. Ось X направим вдоль пружины (по касательной к цилиндрической поверхности), а ось Y – перпендикулярно пружине (вдоль образующей цилиндрической поверхности) Пусть V_x – проекция на ось X правой точки крепления этой пружины. С точно такой же по модулю скоростью, но в противоположном направлении, в этот момент смещается вдоль оси X и левая точка крепления пружины. Поэтому

$$2V_x = \frac{dL(t)}{dt} = \frac{2\pi R'(t)}{N}, \text{ откуда } V_x = \frac{\pi}{N}R'(t) = \frac{\pi}{N}V_R.$$

Движение одной из планок в данный момент времени можно рассмотреть как вращение относительно мгновенной оси O_1 (см. рис). Положение этой мгновенной оси определяется путем восстановления перпендикуляров к векторам скоростей $\vec{V}_x$ и $\vec{V}_y$, которые пересекаются в искомой точке O_1. Можно записать, что

$$\frac{V_y}{a} = \frac{V_x}{b}, \text{ откуда } V_y = \frac{a}{b}V_x = \frac{\pi}{N}V_R \operatorname{tg}\frac{\beta}{2},$$

где a и b – половины длин диагоналей ромба, который образуют рейки. (Отметим, что рассмотрение вращения относительно мгновенной оси – не единственный способ нахождения уравнения кинематической связи при решении этой задачи)

С учетом этого, для кинетической энергии системы имеем:

$$E_k = Nm\left(V_y^2 + V_R^2\right) = NmV_R^2\left(1 + \frac{\pi^2}{N^2}\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\right) \approx NmV_R^2,$$

поскольку N очень велико. Тогда для полной механической энергии, с учетом закона ее сохранения, имеем:

$$NmV_R^2 + \frac{2k\pi^2}{N}\left(R - R_0\right)^2 = \text{const}.$$

Продифференцируем обе части полученного уравнения по времени, учитывая, что $\dfrac{dV_R(t)}{dt} = R''(t)$ – радиальная составляющая ускорения каждого из блоков:

$$2R'R''Nm + 4R'\left(R - R_0\right)\frac{k\pi^2}{N} = 0.$$

После простых преобразований получаем:

$$R'\left(R'' + \frac{2k\pi^2}{mN^2}(R - R_0)\right) = 0.$$

Поскольку R' не равно нулю тождественно, то можно записать:

$$(R - R_0)'' + \frac{2k\pi^2}{mN^2}(R - R_0) = 0.$$

Получено уравнение гармонических колебаний. Из него следует, что круговая частота колебаний системы равна

$$\omega = \frac{\pi}{N}\sqrt{\frac{2k}{m}},$$

а период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = N\sqrt{\frac{2m}{k}}.$$

Возможное решение (второй способ): Посмотрим на конструкцию с направления, совпадающего с осью симметрии цилиндрической поверхности. При изображении конструкции в этой проекции все грузы расположены в вершинах многоугольника (можно считать, что в каждой вершине находится груз общей массой $2m$). К серединам сторон многоугольника прикреплены концы пружин. Пусть в некоторый момент времени угол между рейками равен некоторому значению β, которое мало отличается от равновесного значения α (поскольку колебания малы). Обозначим $\beta/2 = \varphi$, а половину длины каждой рейки обозначим символом λ. Тогда длина стороны многоугольника равна $2\lambda\sin\varphi$ (это расстояние между соседними грузами, расположенными по одну сторону от пружины), а угол, под которым из центра многоугольника видны два этих соседних груза, равен $2\pi/N$. Поэтому расстояние от оси симметрии цилиндрической поверхности до грузов равно $L = \lambda\sin\varphi / \sin(\pi/N)$. Поскольку $N >> 1$, то $L \approx N\lambda\sin\varphi / \pi$.

Координаты грузов, отсчитанные от пружин в направлении вдоль оси цилиндрической поверхности, равны $l = \pm\lambda\cos\varphi$.

Кинетическая энергия движения грузов складывается из энергии, связанной с движением вдоль оси симметрии конструкции и с движением поперек этого направления:

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2}(2m)N\left[\left(\frac{dL}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dl}{dt}\right)^2\right] = mN\lambda^2\left(\frac{N^2}{\pi^2}\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Поскольку $N >> 1$, то вторым слагаемым в скобках можно пренебречь. Тогда

$$E_{\text{кин}} \approx m\lambda^2\frac{N^3}{\pi^2}\cos^2\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Если пружины деформированы, то суммарная потенциальная энергия, связанная с деформациями пружин, равна:

$$U = N\frac{k}{2}(2\lambda\sin\varphi - 2\lambda\sin\varphi_0)^2 = 2Nk\lambda^2(\sin\varphi - \sin\varphi_0)^2,$$

где $\varphi_0 = \alpha/2$.

Введем обозначение: . Тогда суммарная механическая энергия конструкции, с учетом этого обозначения, равна:

$$U + E_{\text{кин}} = 2Nk\lambda^2(\sin\varphi - \sin\varphi_0)^2 + m\lambda^2\frac{N^3}{\pi^2}\left(\frac{d(\sin\varphi - \sin\varphi_0)}{dt}\right)^2 = 2Nkx^2 + m\frac{N^3}{\pi^2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \text{const},$$

Из этого уравнения сразу следует, что система будет совершать гармонические колебания. Квадрат круговой частоты этих колебаний равен отношению коэффициентов при x^2 и $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$:

$$\omega^2 = \frac{2\pi^2 k}{mN^2}.$$

Следовательно, период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = N\sqrt{\frac{2m}{k}}.$$

Ответ: Период малых колебаний системы равен $T = N\sqrt{\frac{2m}{k}}$ **.**

Критерии оценок: *Задача может правильно решаться при помощи большого набора разных верных способов! При решении с помощью энергетических соображений можно выбирать координату разным способом, и выражать энергию через эту координату и соответствующую скорость.*

Записано правильное выражение для потенциальной энергии системы (при любом выборе координаты) – 2 балла.

Правильно записано уравнение кинематической связи для радиальной и осевой составляющих скорости шарнирного блока (или отдельно выписаны выражения для составляющих скоростей, при любом выборе координаты) – 2 балла.

Правильно записано выражение для кинетической энергии системы – 2 балла

Получено правильное выражение для частоты малых гармонических колебаний системы – 3 балла (если правильно записан закон сохранения механической энергии, но при получении из него уравнения гармонических колебаний или их частоты сделана вычислительная ошибка – ставится 1 балл)

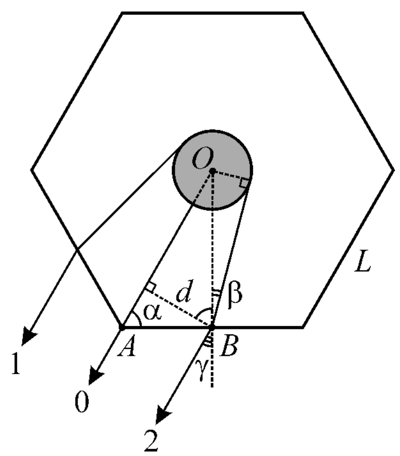
Получен правильный ответ для периода малых гармонических колебаний системы – 1 балл

Примечание: малым слагаемым $\sim 1/N^2$ *в выражении для кинетической энергии можно пренебречь на любом этапе решения; снижать баллы за это не следует.*

Всего: 10 баллов.

Задача 5. Внутри прозрачного шестигранного корпуса шариковой ручки имеется круглый канал, заполненный чернилами. При рассматривании темного канала через прозрачный корпус было отмечено, что вращение корпуса вокруг его оси симметрии приводит к изменению видимой толщины канала с чернилами. Ширина видимой темной полосы максимальна, когда ближайшее ребро шестигранника, ось симметрии ручки и глаз наблюдателя лежат в одной плоскости. Отношение максимальной видимой толщины канала к его минимальной видимой толщине при неизменном расстоянии от ручки до глаза (которое во много раз больше толщины ручки) равно двум. Отношение диаметра d канала к длине L стороны шестигранника равно $d/L = \sqrt{3}/4$. Найдите показатель преломления n материала, из которого сделан корпус.

Возможное решение: Согласно условию задачи, рассматриваемая ручка находится от глаза на расстоянии, которое во много раз больше L, поэтому в глаз попадает узкий пучок световых лучей, идущих от канала. При положении ручки, когда видимая ширина канала максимальна, эта видимая ширина определяется расстоянием между двумя крайними лучами 1 и 2, которые идут от границ канала, и после преломления попадают в глаз. Эти крайние лучи параллельны плоскости, в которой находятся глаз наблюдателя, ось симметрии ручки и ближнее к глазу наблюдателя ребро ручки A. В этой плоскости лежат отрезок OA и центральный луч 0, который идет от центра канала O, и без преломления проходит через ближнее к глазу ребро шестигранника.



Минимальная видимая ширина канала, равная его настоящему диаметру d, очевидно, достигается тогда, когда канал рассматривается через одну из граней корпуса, и все лучи проходят через эту грань.

Согласно условию задачи, максимальная видимая ширина канала вдвое больше минимальной. Поэтому расстояние между лучами 0 и 2 (а также между лучами 0 и 1) равно диаметру d канала. Исходя из этого, найдем точку B на грани корпуса ручки, через которую проходит, например, крайний попадающий в глаз луч 2. Поскольку угол $\alpha = 60°$, то $AB = \frac{d}{\sin\alpha} = \frac{2d}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4d}{\sqrt{3}} = \frac{L}{2}$. Следовательно, лучи, идущие в направлении глаза от точек канала, расположенных максимально далеко от оси симметрии ручки, проходят через середины двух соседних граней корпуса, через которые виден канал.

Это обстоятельство дает возможность определить синус угла падения луча 2 на грань корпуса: $\sin\beta = \frac{d/2}{OB} = \frac{d/2}{L\sin\alpha} = \frac{d}{L\sqrt{3}} = \frac{1}{4}$. Синус же угла преломления этого луча равен $\sin\gamma = \frac{1}{2}$. В соответствии с законом преломления света, $n\sin\beta = \sin\gamma$, откуда искомый показатель преломления материала корпуса ручки $n = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = 2$.

Если вспомнить, что обычное стекло имеет показатель преломления 1,5, специальный сорт стекла «тяжелый флинт» 1,8, а алмаз 2,4, то можно предположить, что корпус ручки изготовлен из какого-то не очень распространенного и, по этой причине, возможно, довольно дорогого материала.

Ответ: показатель преломления материала корпуса ручки $n = 2$**.**

Критерии оценок: Нарисован ход лучей для положения корпуса ручки, при котором наблюдается максимальная ширина канала – 3 балла.

Указано, что минимальная видимая ширина канала, равная его настоящему диаметру d, достигается тогда, когда канал рассматривается через одну из граней корпуса, и все лучи проходят через эту грань – 1 балл.

Доказано, что лучи, идущие от точек канала, расположенных максимально далеко от оси симметрии ручки, проходят через середины двух соседних граней корпуса, через которые виден канал – 2 балла.

Найден синус угла падения крайнего луча на стенку канала – 2 балла

Найден синус угла преломления при прохождении крайнего луча через стенку канала – 1 балл

Получен правильный ответ для показателя преломления – 1 балл

Всего: 10 баллов.