



Ответы и решения

Идея структуры олимпиадного задания — Бычков А. И., Крюков П. А.
Все решения (и формулировки) — Крюков П. А. при участии Бычкова А. И.
Оформление и вёрстка — Крюков П. А.



Изображение в зеркале (6 баллов)

Решение следует из рис. 1. P_1 и P_2 — нижняя и верхняя точки картины соответственно. M_1 и M_2 — крайние точки зеркала. S_1 — изображение в зеркале нижней точки картины, S_2 — изображение верхней точки. Изображение S_1 нижней точки видно из области $M_1D_1D_2M_2$, изображение S_2 верхней точки — из области $M_1C_1C_2M_2$. На уровне глаз человека (3 клетки от пола) эти области пересекаются по отрезку AB . Следовательно, для расстояния x до стены, с которого человек сможет видеть картину целиком, справедливо неравенство $2,2 \text{ м} < x < 4,4 \text{ м}$. Когда человек располагается на расстоянии a от дальней стены, он видит только точки изображения, лежащие на отрезке S_1X . Рассматривая подобные треугольники, находим, что длина отрезка S_1X равна $\frac{a}{3}$, что составляет $\frac{1}{6}$ часть длины отрезка S_1S_2 . Так что человек будет видеть только шестую часть изображения картины.

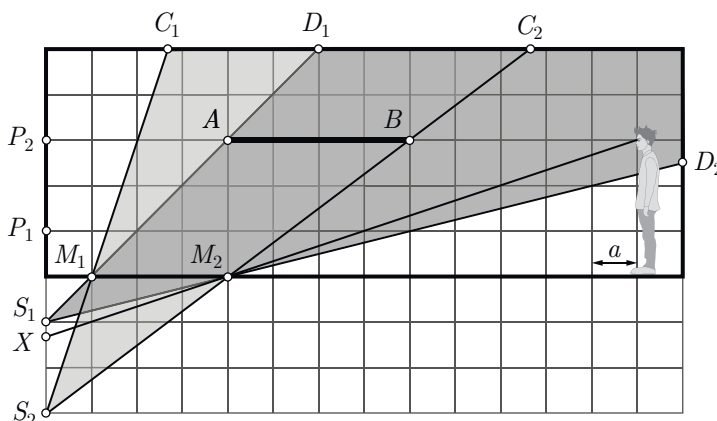


Рис. 1

Распределение баллов

Обоснованный ответ на первый вопрос — 4 балла, на второй вопрос — 2 балла.

Если представленное решение такое, как приведённое выше, то детальное распределение баллов следующее.

- 1) Сделан рисунок, на котором правильно указаны изображения верхней и нижней точек картины в зеркале — 1 балл.
- 2) Построена область $M_1D_1D_2M_2$, из которой видно изображение S_1 — 1 балл.
- 3) Построена область $M_1C_1C_2M_2$, из которой видно изображение S_2 — 1 балл.
- 4) Получено неравенство $2,2 \text{ м} < x < 4,4 \text{ м}$, дающее ответ на первый вопрос — 1 балл.
- 5) Построена точка X — 1 балл.
- 6) Получен правильный ответ на второй вопрос — 1 балл.

Батарейка и конденсатор (8 баллов)

Обозначим a , b , c — линейные размеры батарейки. Два проводящих слоя (фольга и пропитанная электролитом бумага) разделены слоем диэлектрика в виде оксидной плёнки.

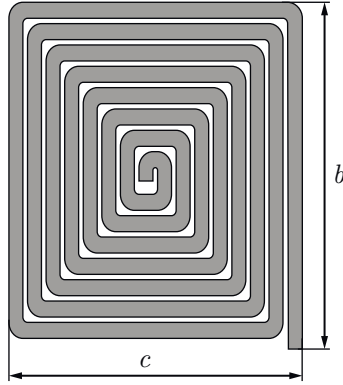


Рис. 2

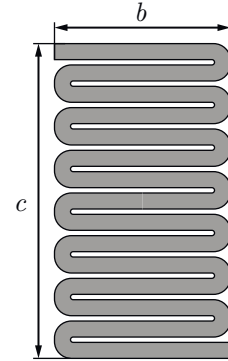


Рис. 3

Таким образом, кусочек материала, например прямоугольной формы размером $a \times b$, образует конденсатор, ёмкость которого равна $C_1 = \frac{ab\epsilon\epsilon_0}{d}$. Если вырезать из листа материала длинную ленту шириной a , затем свернуть её в «прямоугольный рулон», примерно так, как показано на рис. 2, чтобы «рулон» занял весь объём батарейки V , получится конденсатор большой ёмкости. Определим эту ёмкость. Толщина ленты равна $D_0 = 2(D + h) + d \approx 2(D + h)$. Если длина ленты L , то поскольку свёрнутая лента занимает весь объём V справедливо соотношение $V = LD_0a$. Ёмкость получившегося конденсатора определяется по формуле

$$C_0 = \frac{aL\epsilon\epsilon_0}{d} = \frac{V\epsilon\epsilon_0}{dD_0}. \quad (1)$$

Ширина ленты a не входит в итоговое выражение (1), а это означает, что ёмкость не зависит от выбора ширины ленты — можно взять ленту шириной b или c , но другой длины. Отметим, что существует ещё один способ «плотной упаковки» ленты в объём V (рис. 3), но ёмкость конденсатора при этом также будет равна C_0 . Численное значение ёмкости равно $C_0 = 1,4 \cdot 10^{-4}$ Ф. Можно предположить (например, рассмотрев размерность), что «ёмкость» батарейки — это заряд, который протекает через батарейку при подключении нагрузки до тех пор, пока батарейка не начинает «садиться», иначе говоря, пока батарейка способна поддерживать на выводах напряжение 9 Вольт. Этот заряд равен $Q = 0,5 \text{ А} \cdot 3600 \text{ с} = 1800 \text{ Кл}$. Даже если наше предположение (относительно понятия «ёмкость батарейки») ошибочно, очевидно, что с точностью до порядка заряд Q определён правильно, чего для решения задачи достаточно, ведь в условии сказано «оцените». Заряд конденсатора C_0 при напряжении $U = 9 \text{ В}$ на нём равен $q = CU = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}$. Поскольку $q \ll Q$, конденсатор легко можно зарядить от батарейки. Количество циклов зарядки, при этом приближённо равно $n \approx \frac{Q}{q} = \frac{1800 \cdot 10^3}{1,25} = 1,4 \cdot 10^6$.

Распределение баллов

- 1) Предложен способ «плотной упаковки» слоёв материала в объём V такой как в приведённом решении или другой, не предполагающий разрезание на большое количество маленьких кусочков — 2 балла. Упаковка в виде стопки большого количества маленьких прямоугольников (конденсаторов), соединённых проводками — 2 балла. (Хотя соединительные проводники и занимают некий объём, договоримся считать его пренебрежимо малым.)
- 2) Получено правильное выражение для ёмкости C_0 — 2 балла.
- 3) Вычислено верное значение ёмкости — 1 балл.
- 4) Получен правильный ответ на второй вопрос в общем виде — 2 балла.
- 5) Получен правильный числовой ответ на второй вопрос — 1 балл.

На струне (10 баллов)

На рис. 4 показано положение равновесия системы при наличии двух грузов — точка A , а также силы, действующие на грузы. Сами грузы не изображены. Точка B — положение равновесия в случае одного груза. Из условия $x_0 \ll L$ следует, что углы φ_1 и φ_2 малые, а силу натяжения струны можно считать постоянной (обозначаем T) при возникающих колебаниях и в положениях равновесия.

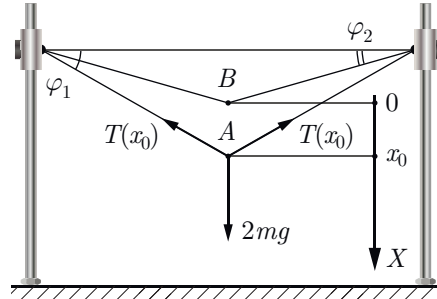


Рис. 4

Из условий равновесия двух грузов (в т. A) и одного (в т. B)

$$2T \cdot \varphi_1 = 2mg, \quad 2T \cdot \varphi_2 = mg$$

следуют соотношения:

$$2T(\varphi_1 - \varphi_2) = mg \Rightarrow 2T \cdot \frac{x_0}{L} = mg \Rightarrow T = \frac{mgL}{2x_0}. \quad (1)$$

Далее записываем второй закон Ньютона и приводим его к уравнению колебаний

$$-2T\varphi(x) + mg = m\ddot{x} \Rightarrow -2T\left(\frac{x}{L} + \varphi_2\right) + mg = m\ddot{x} \Rightarrow \frac{2T}{L}x + m\ddot{x} = 0. \quad (2)$$

Подставляя силу натяжения из формулы (1) в (2), получаем выражения для круговой частоты и периода колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{x_0}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{x_0}{g}}.$$

Распределение баллов

Составителям известно, что существует другой подход к решению задачи, при котором сразу говорится, что колебания груза на струне эквивалентны колебаниям груза на пружине некоторой жёсткости k . В случае, если участник представил такое решение, то распределение баллов следующее.

- 1) Доказательство линейности возвращающей силы по x — 2 балла.
- 2) Получено выражение для k — 4 балла.
- 3) Получено уравнение колебаний — 3 балла.
- 4) Получен правильный ответ для периода — 1 балл.
- 5) Если сразу после нахождения k записывается правильное выражение для периода колебаний пружинного маятника и получается верное значение T — 4 балла.

Для решения, представленного выше, распределение баллов такое.

- 1) Показано, что углы малые — 1 балл.
- 2) Записаны условия равновесия одного и двух грузов — 2 балла.
- 3) Получено выражение для силы натяжения T — 3 балла.
- 4) Записано уравнение колебаний — 3 балла.
- 5) Получен правильный ответ для периода — 1 балл.

Преобразователь (12 баллов)

Для того чтобы понять, как работает схема, рассмотрим поэтапно, что происходит после подключения к бытовой сети. Потенциал на входе равен $U(t) = -U_0 \sin(\omega t)$, где $U_0 = 230\sqrt{2}$ В ≈ 325 В, $\frac{\omega}{2\pi} = 50$ Гц, верхний конденсатор помечаем индексом 1, нижний — индексом 2. На первой четверти периода левый диод открыт (на рис. 5 он заменён на проводник AB), верхний конденсатор заряжается, при этом $U_1 = -U(t)$ (полярность указана на рисунке). В момент времени $t = \frac{T}{4}$ напряжение на верхнем конденсаторе $U_1 = U_0$. Сразу после этого потенциал точки A , который равен $\varphi_A = U(t) + U_0$ становится положительным, открывается правый диод, а левый закрывается (на рис. 6 правый диод заменён на проводник), начинает заряжаться нижний конденсатор (полярность указана на рис. 6), а верхний разряжается. При этом в процессе зарядки будет справедливо соотношение $U_2 - U_1 = U(t)$. Кроме того, суммарный заряд правых обкладок конденсаторов должен оставаться постоянным, равным CU_0 , пока диод, включённый между A и B закрыт, иначе говоря, должно быть справедливо равенство $U_2 + U_1 = U_0$. Таким образом, пока диод закрыт напряжения на конденсаторах удовлетворяют соотношениям

$$U_1 = \frac{U_0 - U(t)}{2}, \quad U_2 = \frac{U_0 + U(t)}{2}. \quad (1)$$

Процесс зарядки нижнего конденсатора будет продолжаться до тех пор, пока потенциал точки A будет положительным. Из (4) следует формула для потенциала

$$\varphi_A = U(t) + U_1 = \frac{U_0 + U(t)}{2}. \quad (2)$$

К моменту времени $t = \frac{3T}{4}$, когда потенциал на входе станет равен $+U_0$, напряжения на конденсаторах станут равны: $U_1 = 0$, $U_2 = U_0$, как следует из формул (1). Потенциал точки A согласно формуле (2) на второй и третьей четвертях периода будет положительным, что лишней раз подтверждает тот факт, что левый диод всё это время будет закрыт. На последней четверти периода ничего происходить не будет, поскольку потенциал точки A (равный $U(t)$) будет положительным, но меньшим U_0 , так что оба диода будут закрыты (рис. 7)

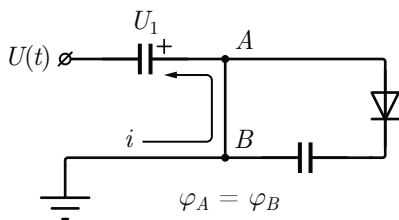


Рис. 5

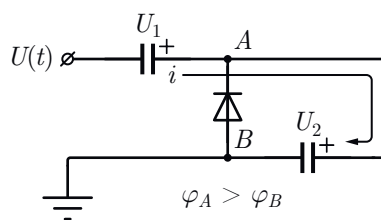


Рис. 6

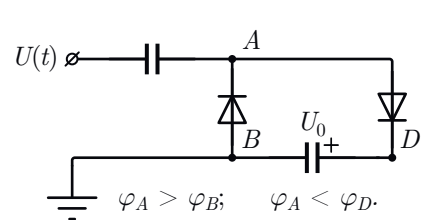


Рис. 7

В первой четверти второго периода левый диод откроется, верхний конденсатор зарядится до напряжения U_0 . На второй четверти ничего происходить не будет, поскольку потенциал точки A будет ниже потенциала точки D , но выше потенциала земли — диоды будут закрыты. На третьей четверти откроется правый диод, к концу третьей четверти нижний конденсатор зарядится до $\frac{3U_0}{2}$, а верхний разрядится до напряжения $\frac{U_0}{2}$. Так что с учётом полярности суммарное напряжение на конденсаторах к концу третьей четверти будет равно U_0 . В последней четверти второго периода ничего происходить не будет.

В первой четверти третьего периода верхний конденсатор опять зарядится до напряжения U_0 , а в третьей четверти начнет заряжаться нижний конденсатор. К концу третьей четверти напряжение на верхнем конденсаторе равно $\frac{3U_0}{4}$, а на нижнем $\frac{7U_0}{4}$. Также как в предыдущем периоде с учётом полярности к концу третьей четверти суммарное напряжение на конденсаторах будет равно U_0 . В последней четверти ничего происходить не будет.

В каждом следующем периоде на нижний конденсатор переходит с верхнего вдвое меньший заряд, чем в предыдущем. Легко видеть, что через время nT напряжение на нижнем конденса-

торе будет равно $2U_0 - U_0 \cdot 2^{1-n}$. Уже через секунду (50 периодов) после подключения к сети на нижнем конденсаторе установится практически неизменное напряжение $2U_0$. Итак, ответы на вопросы п. 1: U_0 ; $\frac{7U_0}{4}$; $2U_0$.

Для ответа на вопрос п. 2 найдём характерное время разрядки одного конденсатора через нагрузку $t_0 = RC = 1$ с. Время t_0 значительно больше периода переменного напряжения, равно-го $T = 0,02$ с. Это означает, что при подключении нагрузки напряжения на конденсаторах за период изменяются на малую величину по сравнению с U_0 . Среднее напряжение U_n на нагрузке будет примерно равно $2U_0$ (на самом деле, немного меньше). По порядку величины отклонение напряжения на нагрузке от среднего значения равно $\delta U = IT \cdot \frac{1}{C} = \frac{2U_0}{R} T \cdot \frac{1}{C}$ (на самом деле немного больше). Таким образом относительное отклонение от среднего значения $\frac{\delta U}{U_n} = \frac{T}{t_0} = 2\%$.

Распределение баллов

- 1) Обоснованно показано, что $U_2(T) = U_0 - 4$ балла.
- 2) Найдено правильное значение $U_2(3T) - 3$ балла.
- 3) Получено правильное значение напряжения на выходе для $t \gg T$ таким способом, как в решении, или любым другим обоснованным способом — 4 балла.
- 4) Показано, что характерное время разрядки конденсатора через нагрузку значительно больше периода переменного напряжения на входе — 2 балла.
- 5) Получена верная (с точностью до порядка) оценка для относительного отклонения напряжения на нагрузке — 3 балла.

Дополнительные материалы

- Статья «Генератор Кокрофта — Уолтона» из «Википедии».
- Статья «Умножитель напряжения» из «Википедии».
- Статья «Умножители напряжения» с веб-сайта radioprogr.ru.
- Статья «Умножители напряжения на диодах» с веб-сайта www.club155.ru.

Прямоточный воздушно-реактивный двигатель (12 баллов)

1) Скорость v_1 потока воздуха относительно двигателя в сечении 1 равна скорости ракеты u , $T_1 = T_0$ по условию. В сечении 2 скорость потока v_2 относительно двигателя близка к нулю. Между сечениями 1 и 2 тепло к потоку не подводится. Применяя для сечений 1 и 2 уравнение термодинамики потока (данное в условии задачи), получаем соотношение

$$T_2(M) = \frac{\mu u^2}{2(c_V + R)} + T_0 = T_0 \left(\frac{M^2}{5} + 1 \right) = \left(\frac{M^2}{5} + 1 \right) \cdot 230 \text{ К.}$$

2) В камере сгорания воздух нагревается при постоянном давлении, поэтому в расчёте на единицу массы $q_0 = \frac{1}{\mu}(c_V + R)(T_3 - T_2)$, откуда после преобразований получаем выражение

$$T_3(M) = \frac{\mu q_0}{(c_V + R)} + T_2 = T_0 \frac{A\gamma R}{(c_V + R)} + T_0 \left(\frac{M^2}{5} + 1 \right) = T_0 \left(\frac{M^2}{5} + 2 \right) = \left(\frac{M^2}{5} + 2 \right) \cdot 230 \text{ К.}$$

3) Для нахождения T_4 сначала преобразуем уравнение адиабаты к виду

$$\frac{T^\gamma}{p^{\gamma-1}} = \text{const},$$

а затем применим его к адиабатическим процессам 1-2 и 3-4. Получим соотношения

$$\frac{T_1^\gamma}{p_1^{\gamma-1}} = \frac{T_2^\gamma}{p_2^{\gamma-1}}, \quad \frac{T_4^\gamma}{p_4^{\gamma-1}} = \frac{T_3^\gamma}{p_3^{\gamma-1}}. \quad (1)$$

Поскольку $p_2 = p_3$, $p_4 = p_1$, а $T_1 = T_0$, то разделив одно из уравнений (1) на другое, получим

$$T_4(M) = T_0 \frac{T_3}{T_2} = T_0 \frac{M^2 + 10}{M^2 + 5} = \frac{M^2 + 10}{M^2 + 5} \cdot 230 \text{ К.}$$

4) Скорость в сечении 4 находится с использованием уравнения термодинамики потока, которое записывается между сечениями 3 и 4

$$\frac{v_4^2}{2} + (c_V + R) \frac{T_4 - T_3}{\mu} = 0. \quad (2)$$

Подставляем T_4 в формулу (2). После преобразований получаем квадрат скорости

$$v_4 = \sqrt{\frac{7}{5} \cdot \frac{RT_0}{\mu} \cdot \frac{M^2 + 10}{M^2 + 5}} = c_0 \sqrt{\frac{M^2 + 10}{M^2 + 5}} = \sqrt{\frac{M^2 + 10}{M^2 + 5}} \cdot 304 \text{ м/с.} \quad (3)$$

5) На входе в двигатель плотность воздуха равна $\rho_0 = \frac{p_0 \mu}{RT_0}$. Относительно двигателя поток на входе имеет скорость $u = M c_0$, а на выходе — v_4 . Сила тяги двигателя равна изменению импульса потока воздуха, проходящего через двигатель в единицу времени.

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} (v_4 - u) = \rho_0 S u (v_4 - u). \quad (4)$$

Подставим в (4) выражения для плотности и скорости из (3), после упрощений получим

$$F = \frac{p_0 \mu}{RT_0} \cdot c_0^2 \cdot S \cdot M \left(\sqrt{\frac{M^2 + 10}{M^2 + 5}} - M \right) \approx \frac{7 p_0 S}{5} \cdot 0,5 = 0,7 p_0 S.$$

Мощность двигателя находится по формуле

$$N = F u \approx 0,7 p_0 S c_0.$$

6) КПД двигателя равен отношению мощности N и величины $\frac{dQ}{dt} = \rho_0 S u q_0$, которая количественно характеризует скорость подвода тепла к воздуху в камере сгорания.

$$\eta = \frac{N}{\rho_0 S u q_0} = \frac{F}{\rho_0 S q_0} \approx \frac{2}{5} \cdot \frac{0,7 p_0}{\rho_0 c_0^2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdot 0,7 = 0,2 = 20 \%. \quad (5)$$

Распределение баллов за задачу дано в формулировке Если в вопросах 1–5 нет числового ответа, но получен правильный ответ в общем виде, оцениваем их полным баллом.

Дополнительные материалы

- [Статья «Прямоточный воздушно-реактивный двигатель»](#) из «Википедии».
- [Brayton Cycle](#). Курс лекций «Термодинамика и двигатели» ([Thermodynamics and Propulsion](#)), профессор Z. S. Spakovszky, Massachusetts Institute of Technology.
- [Ramjet. Indicative marking scheme](#). (Воздушно-реактивный двигатель. Приближённая модель.)
Задача из курса термодинамики профессора Graeme Ackland, School of physics and astronomy, the University of Edinburgh.