

Задание 10.2. Сосчитай шарики.

В прямоугольной запечатанной непрозрачной коробочке находится некоторое количество шариков. Определите их количество.

Толщиной стенок непрозрачной коробочки и её массой можно пренебречь. Считайте, что все шарики одинаковые как внутри прозрачной, так и внутри непрозрачной коробочек. Прозрачная коробочка выдана вам для качественного понимания процессов, происходящих внутри непрозрачной коробочки, её нельзя использовать в качестве оборудования, но вы можете ссылаться на качественные результаты экспериментов с прозрачной коробочкой. Также вы можете извлекать из прозрачной коробочки шарики и проводить с ними необходимые опыты.

ВАЖНО!!! Вскрывать непрозрачную коробочку и получать доступ к её содержимому запрещается! Также предложенный вами метод должен работать и для коробочек с жёсткими стенками, иначе он будет оценён в 0 баллов.

При написании отчёта уделите особое внимание описанию ваших действий, особенно тех, которые направлены на увеличение точности измерений и пояснениям как именно эти действия позволяют увеличить точность измерений.

Примечание. Объём шара равен $V_{\text{ш}} = \pi D^3 / 6$, где D – диаметр шара.

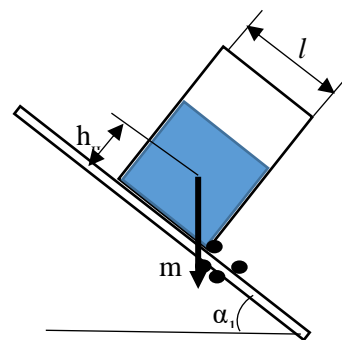
Оборудование: непрозрачная коробочка, две линейки, канцелярская скрепка, прозрачная коробочка, лист миллиметровки формата А5.

Возможное решение.

1. Проведём опыты с прозрачной коробочкой. Так как находящееся внутри неё пшено является сыпучим веществом, то можем заметить, что при наклоне коробочки до некоторого угла пшено сохраняет занимаемую им форму, а после превышения предельного угла пшено лавинообразно пересыпается. Заметим, что, если коробочку установить под некоторым углом и интенсивно постучать по боковым стенкам, создав вибрацию, то поверхность пшена оказывается параллельна горизонту.

Также заметим, что если стучать по коробочке вертикально, то поверхность пшена не всегда оказывается параллельна горизонту.

2. Расположим непрозрачную коробочку вертикально и постучим по её боковым стенкам, тогда пшено расположится так, что примет форму параллелепипеда. Установим коробочку на линейку и начнём плавно увеличивать угол наклона линейки к горизонту. Нам нужен угол, при котором коробочка начнёт переворачиваться. Мы сталкиваемся с проблемой, что коробочка начинает соскальзывать с линейки раньше, чем переворачивается, так как трения о линейку недостаточно. Для решения проблемы прицепим к линейке скрепку так, чтобы она образовала небольшой упор (на рисунке скрепка схематично обозначена четырьмя чёрными кружочками). Так как скрепка тонкая, то созданный ею упор не повлияет на моменты сил, но позволит коробочке не соскальзывать.



3. Повторим опыт с наклоном плоскости и убедимся, что коробочка начинает переворачиваться до того, как пшено внутри неё начинает пересыпаться. Это можно понять двумя способами:

- 1) по звуку (когда пшено пересыпается, это слышно);
- 2) использовать прозрачную коробочку и наклонить её на такой же угол.

Для угла, при котором начинается переворот коробочки, из уравнения моментов сил относительно правого нижнего угла коробочки получим:

$$h_{\text{цм}} = \frac{l}{2} \cdot \operatorname{ctg} \alpha_1.$$

Тогда уровень пшена в коробочке составляет

$$h = 2h_{\text{цм}} = l \cdot \operatorname{ctg} \alpha_1.$$

Измерим ширину l и глубину b коробочки.

$$l = 47 \text{ мм}, b = 39 \text{ мм}.$$

Угол α_1 определим через высоту конца линейки над столом H и длину линейки L .

Для повышения точности проведём опыты несколько раз. Очень важно увеличивать угол наклона плавно и медленно, не создавая вибрации и толчков, из-за которых коробка может начать раньше опрокидываться.

$$L = 31 \text{ см}.$$

№	H , см	$\sin \alpha_1$	$\operatorname{ctg} \alpha_1$
1	13,1	0,423	2,14
2	13,2	0,425	2,12
3	12,9	0,416	2,19

$$\operatorname{ctg} \alpha_{1\text{cp}} = 2,15$$

$$h = l \cdot \operatorname{ctg} \alpha_{1\text{cp}} = 10,1 \text{ см}$$

4. Теперь мы знаем объём, занимаемый пшеном в коробке:

$$V = lbh = 4,7 \cdot 3,9 \cdot 10,1 = 185 \text{ см}^3.$$

5. Для того, чтобы узнать сколько шариков входит в этот объём, есть два варианта:

- 1) измерить объём, занимаемый пшеном в прозрачной коробочке, и посчитать количество шариков (крупинок) в ней;
- 2) определить диаметр шарика и рассчитать плотность упаковки.

6. Выберем второй путь. Для измерения диаметра шарика выложим 50 шариков в ряд и измерим длину ряда. Для формирования ряда можно согнуть миллиметровку и затем насыпать шарики в место сгиба.

Длина ряда $L_p = 10,9$ см, количество шариков $N = 50$ шт, тогда диаметр шарика:

$$D = \frac{L_p}{N} = 2,18 \text{ мм}.$$

Объём одного шарика $V_{\text{ш}} = V_{\text{ш}} = \frac{\pi}{6} D^3 = 5,4 \text{ мм}^3$.

7. Можно рассмотреть разные варианты плотной упаковки.

- 1) Объёмно-центрированная кубическая решётка: элементарной ячейкой является куб, в каждой из вершин которого находится центр зерна, и ещё у одного центр совпадает с центром куба. Найдём

плотность упаковки такой решётки: $k = \frac{V_0}{V_{\text{я}}}$, где $V_0 = NV_{\text{з}}$ – объём, занимаемый зёрнами, N – число зёрен, приходящихся на одну ячейку, $V_{\text{я}} = a^3$ – объём ячейки. Ребро куба a можно связать с диаметром

зерна: $a\sqrt{3} = 2D$ (на большой диагонали куба укладывается два диаметра зерна). N подсчитаем таким образом: каждое из 8 зёрен, центры которых находятся в вершинах куба, принадлежит 8 соседним ячейкам, поэтому на каждую ячейку приходится по $1/8$ зерна, и ещё одно зерно находится в центре куба: $N = 8 \cdot \frac{1}{8} + 1 = 2$.

После подстановки $k = \frac{\pi\sqrt{3}}{8} \approx 0,68$.

- 2) Гранецентрированная решётка. Атомы находятся в вершинах куба и на серединах всех граней. В этом случае:

$$a\sqrt{2} = 2D, N = 8 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 4, k = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} \approx 0,74.$$

- 3) Стандартная кубическая решётка. $a = D, N = 8 \cdot \frac{1}{8} = 1, k = \frac{\pi}{6} \approx 0,52$.

При решении задачи можно было взять любой из вариантов. Опыт, проведённый с заполнением пустот между зёрнами водой, показывает, что в реальности $k = 0,62$.

8. Примем $k = 0,6$. Объём занимаемый одним зёрнышком, равен $V'_{\text{ш}} = \frac{V_{\text{ш}}}{k} = 9,0 \text{ мм}^3$.

9. Тогда количество шариков равно $N_{\text{ш}} = \frac{V}{V'_{\text{ш}}} = 2 \cdot 10^4$.

10. Оценим погрешность: $\Delta \text{ctg} \alpha_{1\text{cp}} = \frac{\sum |\text{ctg} \alpha_i - \text{ctg} \alpha_{\text{cp}}|}{3} = 0,03$; $\Delta D = \frac{2\text{мм}}{N} = 0,04 \text{ мм}$; $\Delta k = 0,1$

$$\varepsilon N_{\text{ш}} = 3 \frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta k}{k} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta b}{b} = 0,26; \quad y \Delta N_{\text{ш}} = N_{\text{ш}} \cdot \varepsilon N_{\text{ш}} = 0,5 \cdot 10^4.$$

Окончательно:

$$N_{\text{ш}} = (2,0 \pm 0,5) \cdot 10^4$$

