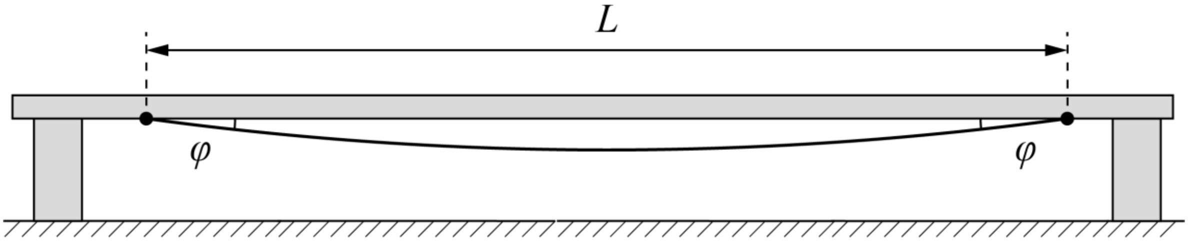
Задание 11.2. Упругая лента. Изгиб подвешенной за концы резиновой ленты определяется при равновесии упругих сил и силы тяжести. Для растянутой ленты, линейную плотность которой можно считать постоянной, её натяжение $T = ES\Delta L/L$, , где E модуль Юнга, S и L площадь сечения и длина ленты в нерастянутом виде, ΔL её удлинение. Закрепим концы ленты на одной горизонтали на расстоянии, равном её длине L в нерастянутом виде (рис.1). Провисшая под собственным весом лента образует с горизонталью некоторый угол φ, а середина ленты ниже этой горизонтали на некоторое расстояние h, называемое стрелой прогиба.



ЗАДАНИЕ

1. При помощи предложенного оборудования, измерьте стрелы прогиба h не менее чем для 10 значений длины ленты в **ненатянутом виде** L в диапазоне от 30 до 120 см. Результаты представьте в виде таблицы и графика $h(L)$.
2. Используя полученные вами в п.1 экспериментальные результаты, считая, что $h = A \cdot L^n$, при использовании графической обработки, определите значение n (n – не обязательно целое число). Сравните полученный результат с теоретической моделью по п.1. Оцените погрешность определения n.
3. При φ <<1 или h << L можно считать, что лента имеет постоянную линейную плотность и растянута по дуге окружности. Выведите в этом приближении теоретическое выражение для зависимости h от L, считая заданными: плотность резины ρ**,** модуль Юнга E, ускорение свободного падения g. В пределе малых углов можно использовать следующие приближения:

$$\sin\varphi \cong \varphi - \varphi^3/6;\ \cos\varphi \cong 1 - \varphi^2/2\ ;\ \mathrm{tg}\varphi \cong \varphi + \varphi^3/3.$$

Сравните полученную формулу с результатом, полученным в п.2

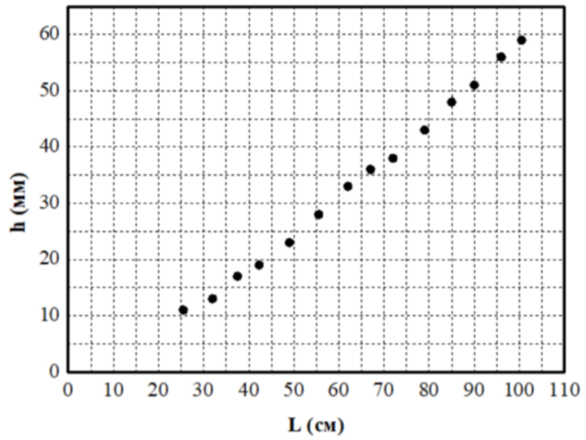
4. Используя теоретическую зависимость, выведенную Вами в п.3 и результаты, полученные в п.1, определите значение модуля Юнга. Плотность резины ρ = 1,25 г/см^3, ускорение свободного падения g = 9,8 м/с^2. Оцените погрешность определения E.

Оборудование: дюралевый уголок длиной 120 см; два бруска 15x10x3 см как опоры; тонкая резиновая лента длиной 120 см и шириной 2-3 см (отрезать от резинового медицинского бинта); два зажима для фиксации ленты на уголке (из гвоздя и кольцевой «денежной» резинки, или короткая деревянная линейка и канцелярская клипса); мерная лента; миллиметровая бумага для построения графиков; скотч.

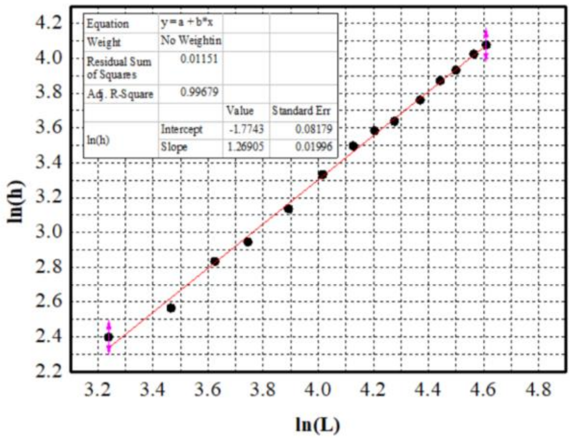
Возможное решение. Под длиной резиновой ленты понимается длина её участка между фиксирующими зажимами. С помощью мерной ленты размечается уголок и резиновая лента, положенная сверху на горизонтальную или даже наклонную поверхность уголка. После фиксации зажимами уголок поворачивают так, чтобы резиновая лента могла свободно провисать от горизонтальной поверхности. К другой стороне уголка (вертикальной) прикрепляем скотчем миллиметровую бумагу, и для указанных значений L измеряем стрелу прогиба.

Результаты измерений вносим в таблицу, с дополнительными столбцами для дальнейшей обработки.

L, см	$L^{4/3}$, м$^{4/3}$	h, мм	$ln(L)$	$ln(h)$
100.5	1.007	59	4.61	4.08
96.0	0.947	56	4.56	4.03
90.0	0.869	51	4.50	3.93
85.0	0.805	48	4.44	3.87
79.0	0.730	43	4.37	3.76
72.0	0.645	38	4.28	3.64
67.0	0.586	36	4.20	3.58
62.0	0.529	33	4.13	3.50
55.5	0.456	28	4.02	3.33
49.0	0.386	23	3.89	3.14
42.3	0.318	19	3.74	2.94
37.5	0.270	17	3.62	2.83
32.0	0.219	13	3.47	2.56
25.5	0.162	11	3.24	2.40



2. Строим график зависимости $\ln h\,(\ln L)$. По угловому коэффициенту определяем величину $n = 1{,}27 \pm 0.02$. С учётом разброса экспериментальных данных с помощью этого же графика оцениваем погрешность определения n.



3. При φ <<1 или h << L можно считать, что лента имеет постоянную линейную плотность и растянута по дуге окружности некоторого радиуса R. Раз горизонтальная проекция натяжения неизменна, то $T\cos\varphi = T_o$, где T_o натяжение в нижней точке, а T натяжение вблизи точки подвеса. Отсюда для малого φ имеем $T \simeq T_o$.

Из равновесия по вертикали $2T\sin\varphi = \rho gLS$, а тогда $T \simeq \rho gLS/2\varphi$.

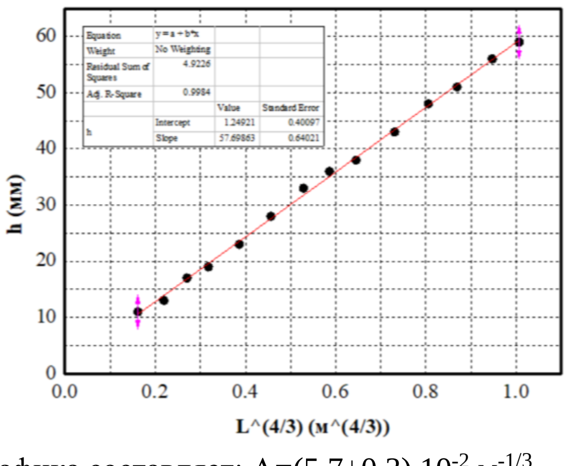
Относительное удлинение $\Delta L/L = 2R(\varphi - \sin\varphi)/2R\sin\varphi \cong \varphi^2/6$.

После подстановок из $T = ES\Delta L/L$ находим для модуля Юнга $E = 3\rho gL/\varphi^3$.

Так как $h = R(1 - \cos\varphi)$, а $L = 2R\sin\varphi$, то $\varphi = 4h/L$, а $E = 3\rho gL^4/64h^3$.

Использованы приближения: $\sin\varphi \cong \varphi - \varphi^3/6$; $\cos\varphi \cong 1 - \varphi^2/2$; $\mathrm{tg}\varphi \cong \varphi + \varphi^3/3$.

4. Для определения модуля Юнга можно построить график зависимости $h\left(L^{4/3}\right)$ и по наклону графика определить E. Другая возможность решения – расчёт по полученной формуле зависимости $h(L)$ значений E для разных L с последующим усреднением.



Угловой коэффициент графика составляет: A=(5,7±0,3) 10^{-2} $м^{-1/3}$

Из углового коэффициента модуль Юнга:

$$E = \frac{3\rho g}{64A^3} = (3.1 \pm 0.5)\ \text{МПа}$$