Условие

В момент противостояния Солнце, Земля и Марс находятся на одной прямой (Земля между Солнцем и Марсом). Продолжительность земного года $T = 365$ суток, марсианского — в $k = 1{,}88$ раза больше. Считая, что планеты обращаются вокруг Солнца по круговым орбитам с общим центром, лежащим в одной плоскости, найдите минимальный промежуток времени τ, между двумя последовательными противостояниями. Планеты движутся в одну сторону.

Примерные критерии оценивания

Описано условие двух последовательных противостояний 2

Найден угол поворота Земли 2

Найден угол поворота Марса 2

Получен ответ 4

Возможное решение

Два последовательных противостояния наступают через промежуток времени τ, за который Земля обгонит Марс на полный оборот, то есть на 360°.

За это время Земля повернётся на угол

$$\varphi_З = \frac{360^\circ}{T} \cdot \tau,$$

а Марс на угол

$$\varphi_М = \frac{360^\circ}{kT} \cdot \tau.$$

Условие противостояния:

$$360^\circ = \varphi_З - \varphi_М = \frac{360^\circ}{T} \cdot \tau - \frac{360^\circ}{kT} \cdot \tau.$$

Отсюда

$$\tau = T \cdot \frac{k}{k-1} = 365 \cdot \frac{1{,}88}{1{,}88 - 1} \approx 780 \text{ суток.}$$

Условие

На метеорологической станции проводят измерения плотности снега в воздухе при помощи осадкомера. Осадкомер представляет собой цилиндрический сосуд с площадью дна 200 см^2 и высотой 40 см, куда собираются осадки. Во время измерений снежинки падали вертикально вниз со скоростью $v = 0{,}6$ м/с. За шесть часов уровень снега в осадкомере достиг $h = 15$ см, а плотность снега в сосуде составила $\rho_0 = 0{,}15$ г/см^3. Определите, чему равна плотность снега ρ в воздухе во время снегопада, то есть масса снега, находящегося в одном кубическом метре воздуха.

Примерные критерии оценивания

Найдена масса снега в сосуде 3
Найден объём, занимаемый снегом такой массы в воздухе 5
Найдена плотность снега в воздухе 2

Возможное решение

Масса снега в сосуде

$$m = \rho_0 S h = 0{,}15\ \text{г/см}^3 \cdot 200\ \text{см}^2 \cdot 15\ \text{см} = 450\ \text{г}.$$

Найдём, какой объём занимает снег такой массы в воздухе. Так как снег падал вертикально вниз с постоянной скоростью, то его объём в воздухе

$$V = SH = Svt = 200\ \text{см}^2 \cdot 60\ \text{см/с} \cdot 6 \cdot 3600\ \text{с} = 259200000\ \text{см}^3 = 259{,}2\ \text{м}^3.$$

Плотность снега в воздухе

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\rho_0 h}{vt} \approx 1{,}736\ \text{г/м}^3.$$

Заметим, что ответ не зависит от площади S.

Условие

Рыбак на лодке с мотором снялся с якоря, при этом случайно обронил в воду весло, и затем поплыл вверх против течения. Через 5 минут, проплыв вдоль берега 1200 м, он обнаружил пропажу весла, развернул лодку и поплыл обратно. Когда он догнал его, то заметил, что весло снесло вниз по течению на 600 м. Считайте, что скорость течения реки и скорость лодки относительно воды постоянны.

1. Через какое время t_0, после обнаружения пропажи весла, рыбак подплыл к нему?
2. Какова скорость v_p течения реки?
3. Какова скорость v_0 моторной лодки в стоячей воде?

Примерные критерии оценивания

Указание на то, что рыбак в обе стороны плыл одно и то же время	1
Ответ на первый вопрос с обоснованием	3
Ответ на второй вопрос	3
Ответ на третий вопрос	3

Возможное решение

1. Рассмотрим движение лодки относительно воды в реке. Так как весло относительно воды в реке неподвижно, то лодка удалялась от весла и приближалась к нему одно и то же время. Следовательно, рыбак достал весло из воды через $t_0 = 5$ минут после обнаружения пропажи.

2. Весло находилось в воде (5+5) минут = 10 минут = 600 с. Скорость течения реки

$$v_\text{р} = \frac{600\ \text{м}}{600\ \text{с}} = 1\ \text{м/с}.$$

3. Вверх против течения реки рыбак плыл со скоростью $v_\text{верх} = \dfrac{1200\ \text{м}}{300\ \text{с}} = 4$ м/с. Отсюда найдем скорость лодки в стоячей воде:

$$v_0 = v_\text{верх} + v_\text{р} = (4+1)\ \text{м/с} = 5\ \text{м/с}.$$

Условие

Шарик накачали гелием. Масса газа составляет 20% от массы всего шарика. Через день, когда часть гелия просочилась через стенки, объём шарика уменьшился в 2 раза, а масса гелия стала составлять 10% от массы всего шарика. Определите, во сколько раз изменилась средняя плотность воздушного шарика.

Примерные критерии оценивания

Найдено, как связана масса гелия и масса шарика вначале 3
Найдено, как связана масса гелия и масса шарика после изменения 3
Указано, как связано отношение плотностей с отношением масс и объёмов . 1
Получен ответ 3

Возможное решение

Пусть m — масса оболочки шарика, m_1 — масса гелия в первом случае. Масса шарика складывается из массы гелия и оболочки, поэтому

$$m_1 = 0{,}2 \cdot (m_1 + m).$$

Отсюда найдём соотношение между массой гелия m_1 и массой оболочки m шарика в первом случае:

$$m_1 = m/4.$$

Аналогично, во втором случае:

$$m_2 = 0{,}1 \cdot (m_2 + m).$$

$$m_2 = m/9.$$

Отношение плотностей выражается через отношение масс и отношений объёмов:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{m + m_2}{m + m_1} \cdot \frac{V_1}{V_2}.$$

Подставляя в это выражение массы, выраженные через массу оболочки, получаем ответ:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{m + m/9}{m + m/4} \cdot \frac{V_1}{V_2} = \frac{10}{9} \cdot \frac{4}{5} \cdot 2 = \frac{16}{9} \approx 1{,}78.$$

Условие

Экспериментатор Глюк и теоретик Баг по утрам гуляют в парке. Вместе с Глюком на прогулку вышел и его пес Шарик. Баг, не торопясь, бежит трусцой по прямой дорожке навстречу Глюку со скоростью $v_Б$, а Глюк идет с Шариком навстречу Багу со скоростью $v_Г$. Когда Глюк увидел Бага, расстояние между ними было равно L. Он тут же отпустил Шарика, и тот со всех ног со скоростью $v_0 = 3(v_Г + v_Б)$ бросился бежать к товарищу своего хозяина. Шарик, добежав до Бага, некоторое время идет рядом с ним, а затем бросается к своему хозяину. Добежав до него и пройдясь немного рядом с Глюком, он снова бежит к Багу, и так несколько раз. За время сближения приятелей Шарик провел возле каждого из них одинаковое время. Общая длина пути, который успел пройти и пробежать пес, равна $2L$. Сколько времени Шарик бегал со скоростью v_0, если друзья встретились через 1 минуту 40 секунд? До самой встречи скорости приятелей не изменялись.

Примерные критерии оценивания

Найдена связь между между T и L (1) 2
Найдена связь между между τ и L_1 (2) 2
Найдена связь между между t и L_2 (3) 2
Записано выражение, связывающее разные времена (например, $\tau = 0{,}2T$) .. 3
Получен численный ответ 1

Возможное решение

Глюк и Баг встретились через время

$$T = L/(v_Г + v_Б). \quad (1)$$

Пусть τ – время, которое Шарик провел, находясь рядом с каждым из друзей. Тогда с каждым из них он прошел часть пути, равную

$$L_1 = \tau(v_Г + v_Б). \quad (2)$$

Все остальное время $t = T–2\tau$ Шарик бегал со скоростью v_0. За это время он пробежал расстояние:

$$L_2 = (T–2\tau)\cdot 3(v_Г + v_Б). \quad (3)$$

По условию, Шарик пробежал путь $L_1 + L_2 = 2L$. Отсюда следует:

$$\tau(v_Г + v_Б) + (T–2\tau)\cdot 3(v_Г + v_Б) = 2T(v_Г + v_Б). \quad (4)$$

Тогда $\tau = 0{,}2T$. Шарик бегал $T–2\tau = 0{,}6T = 60$ с.

Условие

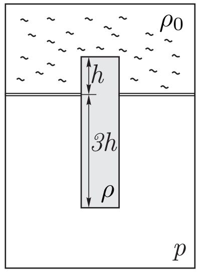

Рис. 1

В герметичном сосуде сверху находится жидкость с плотностью $\rho_0 = 800$ кг/м^3, отделенная легким подвижным поршнем от газа (рис. 1), находящегося внизу и имеющего давление $p = 20$ кПа. В поршне есть круглое отверстие, в которое вставлен цилиндрический поплавок. Причем в жидкость поплавок погружен на некоторую длину h, а в газ на длину $3h$. Площадь основания поплавка S. Поплавок может свободно скользить относительно поршня, а поршень относительно стенок сосуда. Жидкость нигде не подтекает. Какой должна быть плотность поплавка ρ, чтобы система могла оставаться в равновесии? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Примерные критерии оценивания

Записано условие равновесия поршня 1
Найдено давление наверху поплавка 2
Записано условие равновесия поплавка 4
Найдена плотность поплавка 2
Получен численный ответ 1

Возможное решение

Из условия равновесия легкого поршня следует, что давление непосредственно над поршнем равно p. Тогда давление у верхнего торца поплавка

$$p_1 = p - \rho_0 g h.$$

Из условия равновесия поплавка

$$p_1 S + mg = pS,$$

получаем выражение

$$(p - \rho_0 g h)S + \rho \cdot 4hSg = pS,$$

из которого получаем ответ:

$$\rho = \rho_1/4 = 200 \text{ кг/м}^3.$$

Примечание. Положение равновесия, рассматриваемое в задаче — неустойчиво.

Условие

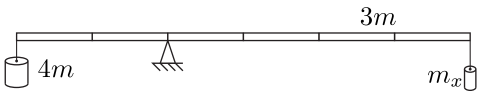

Рис. 2

На рычаге массой $3m$ висят две льдинки (рис. 2). Точка опоры делит рычаг в соотношении 1:2. К короткому плечу рычага подвешена льдинка массой $4m$.

1. Какую массу должна иметь льдинка, подвешенная к длинному плечу, чтобы система находилась в равновесии?

2. Льдинки одновременно начали нагревать. Во сколько раз должны отличаться мощности подводимого к льдинкам тепла, чтобы равновесие сохранилось? Льдинки находятся при температуре плавления.

Примерные критерии оценивания

Записано правило моментов исходной системы 3
Получен ответ для массы правой льдинки 1
Найдена связь между изменениями масс льдинок $2\Delta m = \Delta m_x$ 3
Приведено доказательство пропорциональности растаявшей массы и мощности 2
Получен ответ для отношения мощностей 1

Возможное решение

1. Расставим силы, действующие на рычаг (рис. 3) и воспользуемся правилом моментов относительно точки опоры:

$$4mg \cdot 2L = 3mgL + m_x g \cdot 4L,$$

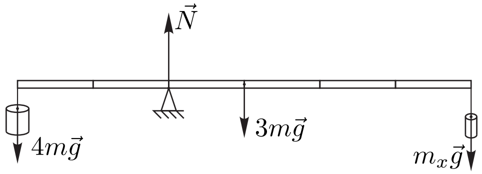

Рис. 3

отсюда $m_x = 5m/4$.

2. Так как льдинки уже при температуре плавления, вся теплота сразу идет на плавление. Пусть за некоторое время Δt масса левой льдинка уменьшилась на Δm, а правой — на Δm_x. Тогда по правилу моментов:

$$4(m - \Delta m)g \cdot 2L = 3mgL + (m_x - \Delta m_x)g \cdot 4L.$$

Если вычесть из первого уравнения второе, получим $2\Delta m = \Delta m_x$. Изменение массы льдинки пропорционально подведённому количеству теплоты, которое пропорционально мощности нагрева. Следовательно, мощность нагрева левой льдинки должна быть в 2 раза больше.

Условие

Теплоизолированный сосуд был до краев наполнен водой при температуре $t_0 = 19°$C. В середину этого сосуда быстро, но аккуратно опустили деталь, изготовленную из металла плотностью $\rho_1 = 2700$ кг/м^3, нагретую до температуры $t_д = 99°$C, и закрыли крышкой. После установления теплового равновесия температура воды в сосуде стала равна $t_x = 32{,}2°$C. Затем в этот же сосуд, наполненный до краев водой при температуре $t_0 = 19°$C, вновь быстро, но аккуратно опустили две такие же детали, нагретые до той же температуры $t_д = 99°$C, и закрыли крышкой. В этом случае после установления в сосуде теплового равновесия температура воды равна $t_y = 48{,}8°$C. Чему равна удельная теплоемкость c_1 металла, из которого изготовлены детали? Плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м^3. Удельная теплоемкость воды с$_0$ = 4200Дж/(кг · °C).

Примерные критерии оценивания

Записано уравнение теплового баланса (5) 3
Записано уравнение теплового баланса (6) 3
Получено выражение для теплоёмкости c_1 3
Приведён числовой ответ 1

Возможное решение

Пусть объем сосуда равен V_0, а объем детали, соответственно, V_1.
Запишем уравнения теплового баланса для первого и для второго случаев:

$$c_1\rho_1 V_1(t_д - t_x) = c_0\rho_0(V_0 - V_1)(t_x - t_0), \qquad (5)$$

$$c_1\rho_1 \cdot 2V_1(t_д - t_y) = c_0\rho_0(V_0 - 2V_1)(t_y - t_0). \qquad (6)$$

Преобразуем эти выражения:

$$c_1\rho_1 V_1\frac{t_д - t_x}{t_x - t_0} + c_0\rho_0 V_1 = c_0 V_0\rho_0,$$

$$c_1\rho_1 (2V_1)\frac{t_д - t_y}{t_y - t_0} + c_0\rho_0 (2V_1) = c_0 V_0\rho_0.$$

Из равенства правых частей уравнений следует равенство левых частей, на объём V_1 можно сократить:

$$c_1\rho_1\frac{t_д - t_x}{t_x - t_0} + c_0\rho_0 = 2c_1\rho_1\frac{t_д - t_y}{t_y - t_0} + 2c_0\rho_0,$$

откуда

$$c_1 = c_0\frac{\rho_0}{\rho_1}\frac{1}{\left(\frac{t_д - t_x}{t_x - t_0} - 2\frac{t_д - t_y}{t_y - t_0}\right)} = 919{,}642 \text{ Дж/(кг} \cdot {}^\circ\text{C)} \approx 920 \text{ Дж/(кг} \cdot {}^\circ\text{C)}.$$